

Séance 2 – Le modèle mathématique du décalage musical (Partie 1) – Corrigé

Introduction : Généralisation du procédé

Nous avons vu dans la séance 1 que le second interprète, en décalant d'une note, doit faire douze répétitions du motif initial pour revenir à son point de départ. On va maintenant étudier les cas où le second interprète décalerait de deux notes, trois notes, etc.

Étape 1 : Simplification du problème

Pour le motif initial, il n'y a pas de décalage, on le note donc décalage 0. On note A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L les douze notes. Lorsque le deuxième exécutant effectue le décalage 1, il commence à la note B, puis il continue à décaler, jusqu'à revenir au motif initial. Par exemple, on obtient ce tableau pour représenter le morceau « Clapping Music » de Steve Reich, dans lequel chaque case représente une note :

Décalage 0	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Décalage 1	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	A
Décalage 2	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	A	B
Décalage 3	D	E	F	G	H	I	J	K	L	A	B	C
Décalage 4	E	F	G	H	I	J	K	L	A	B	C	D
Décalage 5	F	G	H	I	J	K	L	A	B	C	D	E
Décalage 6	G	H	I	J	K	L	A	B	C	D	E	F
Décalage 7	H	I	J	K	L	A	B	C	D	E	F	G
Décalage 8	I	J	K	L	A	B	C	D	E	F	G	H
Décalage 9	J	K	L	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Décalage 10	K	L	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Décalage 11	L	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Décalage 12	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L

Exercice 1 : Le deuxième exécutant va décaler cette fois de deux notes à chaque répétition.

1. Compléter le tableau ci-dessous, qui indique toutes les notes du morceau, jusqu'à la fin du morceau (toutes les lignes du tableau ne seront pas forcément utilisées).
2. Un élève dit au professeur : « C'est long ! Je pense qu'on peut aller beaucoup plus vite en regardant uniquement la première note de chaque décalage... ». Qu'en penses-tu ?

Correction :

1. On obtient le tableau suivant :

Motif 0	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Décalage 1	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	A	B
Décalage 2	E	F	G	H	I	J	K	L	A	B	C	D
Décalage 3	G	H	I	J	K	L	A	B	C	D	E	F
Décalage 4	I	J	K	L	A	B	C	D	E	F	G	H
Décalage 5	K	L	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Décalage 6	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L

2. L'élève a raison : si on connaît la première note d'une répétition, il suffit de poursuivre la séquence sur toute la ligne. De plus, quand la note A apparaît dans la première case d'une ligne, le morceau est terminé. Il suffit donc de regarder uniquement la première colonne des notes du tableau.

Bilan : On peut simplifier le tableau, en gardant uniquement la première note de chaque décalage. Ceci donne, pour les deux exemples précédents, les séquences suivantes, représentées en lignes (la « Note » étant la première du décalage) :

Décalage de 1 note :

Décalage	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Note	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	A

Pour terminer le morceau, on a fait 12 décalages.

Décalage de 2 notes :

Décalage	0	1	2	3	4	5	6
Note	A	C	E	G	I	K	A

Pour terminer le morceau, on a fait 6 décalages.

Étape 2 : Deux autres exemples

Exercice 2 : Construire les tableaux pour un décalage de 3 notes, puis de 4 notes.

Correction :

Décalage de 3 notes :

Décalage	0	1	2	3	4
Note	A	D	G	J	A

Pour terminer le morceau, on a fait 4 décalages.

Décalage de 4 notes :

Décalage	0	1	2	3
Note	A	E	I	A

Pour terminer le morceau, on a fait 3 décalages.

Exercice 3 : Faire le même travail pour un décalage de 6 notes, puis de 8 notes.

Correction :

La séquence initiale est : A – B – C – D – E – F – G – H – I – J – K – L. Par exemple, pour un décalage de 6 notes, la première note du premier décalage est la 6^{ème} note après A, donc G. On continue à partir de G pour trouver la première note du deuxième décalage (en reprenant à A après L). On obtient A.

Décalage de 6 notes :

Décalage	0	1	2
Note	A	G	A

Pour terminer le morceau, on a fait 2 décalages.

Décalage de 8 notes :

Décalage	0	1	2	3
Note	A	I	E	A

Pour terminer le morceau, on a fait 3 décalages.

Étape 3 : Un peu plus complexe

Exercice 4 :

1. Faire le même travail pour un décalage de 9 notes, puis de 5 notes, puis de 7 notes.

Correction :

Décalage de 9 notes :

Décalage	0	1	2	3	4
Note	A	J	G	D	A

Pour terminer le morceau, on a fait 4 décalages.

Décalage de 5 notes :

Décalage	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Note	A	F	K	D	I	B	G	L	E	J	C	H	A

Pour terminer le morceau, on a fait 12 décalages.

Décalage de 7 notes :

Décalage	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Note	A	H	C	J	E	L	G	B	I	D	K	F	A

Pour terminer le morceau, on a fait 12 décalages.

2. On note M le produit du nombre de notes du décalage par le nombre de décalages. Compléter le tableau suivant (on utilisera les résultats précédents pour remplir la troisième colonne) :

Correction :

On regroupe les résultats obtenus au préalable dans la troisième colonne (nombre de décalages). Le nombre total de notes est le produit du nombre de notes du motif initial et du nombre de décalage. On obtient :

Nombre de notes du motif initial	Nombre de notes du décalage	Nombre de décalages	M	Nombre total de notes du morceau
12	1	12	12	144
12	2	6	12	72
12	3	4	12	48
12	4	3	12	36
12	5	12	60	144
12	6	2	12	24
12	7	12	84	144
12	8	3	24	36
12	9	4	36	48

3. Que représente, pour chaque ligne, le nombre M par rapport au nombre de notes du motif initial et au nombre de notes du décalage ?

Correction :

M est le plus petit multiple commun PPCM au nombre de notes du motif initial et au nombre de notes du décalage.

Bilan :

Propriété et définition : Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Alors il existe un unique entier naturel, noté $PPCM(a ; b)$ appelé plus petit multiple commun de a et b tel que :

- 1) $PPCM(a ; b)$ est un multiple de a et b
- 2) Tout multiple commun de a et b est divisible par $PPCM(a ; b)$.

Remarque : Si a ou b sont nuls, on a par convention $PPCM(a ; b) = 0$