# Séance 3 – Le modèle mathématique du décalage musical (Partie 2) – Corrigé

## Introduction : Retour sur le modèle mathématique

Exercice 1 :
On reprend le tableau réalisé à la fin de la séance 2, où $M$ est le PPCM du nombre de notes du motif initial et du nombre de notes du décalage :

| Nombre de notes du motif initial | Nombre de notes du décalage | Nombre de décalages | $M$ | Nombre total de notes du morceau |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 1 | 12 | 12 | 144 |
| 12 | 2 | 6 | 12 | 72 |
| 12 | 3 | 4 | 12 | 48 |
| 12 | 4 | 3 | 12 | 36 |
| 12 | 5 | 12 | 60 | 144 |
| 12 | 6 | 2 | 12 | 24 |
| 12 | 7 | 12 | 84 | 144 |
| 12 | 8 | 3 | 24 | 36 |
| 12 | 9 | 4 | 36 | 48 |

1. Remplir la quatrième colonne.
2. Comment obtient-t-on le nombre de décalages, si on connaît $M$ et le nombre de notes du décalage ? Remplir alors la troisième colonne.
3. Comment obtient-t-on alors le nombre total de notes du morceau ? Remplir ainsi la dernière colonne.

Correction :

1. $M$ est le PPCM du nombre de notes du motif initial et du nombre de notes du décalage.
2. On obtient le nombre de décalages en divisant $M$ par le nombre de notes du décalage.
3. On obtient alors le nombre total de notes en multipliant le nombre de notes du motif initial et le nombre de décalages.

**Bilan :** En utilisant le PPCM du nombre de notes du motif initial et du nombre de notes du décalage, on peut calculer le nombre de décalages pour terminer le morceau et le nombre total de notes du morceau. Ce PPCM permet donc de trouver toutes les caractéristiques du morceau, autrement dit de résoudre le problème.

## Étape 1 : Cas où l'un des deux nombres est un multiple de l'autre

Exercice 2 (questions flash) :
Donner, sans justifier, le plus petit multiple commun de :

- 1 et 12
- 2 et 12
- 3 et 12
- 4 et 12
- 6 et 12
- 12 et 12

**Bilan :**

**Propriété :** Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels.
Si $b$ est un multiple de $a$, alors $PPCM(a\,;b) = b$.
En particulier, on a $PPCM(b\,;b) = b$.

# Étape 2 : Méthode avec la liste des multiples

## Exercice 3 : décalage de 5 notes, motif initial de 12

On étudie un décalage de 5 notes, avec un motif initial de 12.

1. Écrire la liste des multiples 5 compris entre 0 et 120.
2. Écrire la liste des multiples 12 compris entre 0 et 120.
3. En déduire le plus petit multiple commun de 5 et 12.

Correction :

1. Multiples de 5 : 0 ; 5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; 30 ; 35 ; 40 ; 45 ; 50 ; 55 ; 60 ; 65 ; 70 ; 75 ; 80 ; 85 ; 90 ; 95 ; 100 ; 105 ; 110 ; 115 ; 120 ; …
2. Multiples de 12 : 0 ; 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ; 72 ; 84 ; 96 ; 108 ; 120 ; …
3. On a $PPCM(5\,;12) = 60$.

## Exercice 4 : décalage de 7 notes, motif initial de 12

On étudie un décalage de 7 notes, avec un motif initial de 12.

1. Écrire la liste des multiples de 7 compris entre 0 et 120.
2. Écrire la liste des multiples de 12 compris entre 0 et 120.
3. En déduire le plus petit multiple commun de 5 et 12.

Correction :

1. Multiples de 7 : 0 ; 7 ; 14 ; 21 ; 28 ; 35 : 42 ; 49 ; 56 ; 63 ; 70 ; 77 ; 84 ; 91 ; 98 ; 105 ; 112 ; 119 ; …
2. Multiples de 12 : 0 ; 12 ; 24 ; 36 ; 48 ; 60 ; 72 ; 84 ; 96 ; 108 ; 120 ; …
3. On a $PPCM(7\,;12) = 84$.

# Étape 3 : Méthode avec la décomposition en produit de facteurs premiers

**Définition :** Un nombre **premier** est un nombre entier naturel qui possède exactement deux diviseurs, qui sont 1 et lui-même.

**Théorème :** Tout nombre entier naturel peut se décomposer en produits de facteurs premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

## Exercice 5 :

1. Décalage de 8 notes, motif initial de 12 ($\boldsymbol{M = 24}$)
   a) Décomposer 8 et 12 en produit de facteurs premiers.
   b) Décomposer $\boldsymbol{M}$ en produit de facteurs premiers.
2. Décalage de 9 notes, motif initial de 12 ($\boldsymbol{M = 36}$)
   a) Décomposer 9 et 12 en produit de facteurs premiers.
   b) Décomposer $\boldsymbol{M}$ en produit de facteurs premiers.
3. En observant les décompositions obtenues sur les deux exemples, comment peut-on obtenir $\boldsymbol{M}$ à partir des décompositions en facteurs premiers des deux nombres de départ ?

Correction :

1. Décalage de 8 notes ($\boldsymbol{M = 24}$)
   a) $8 = 2^3$ et $12 = 2^2 \times 3$
   b) $M = 24 = 2^3 \times 3$
2. Décalage de 9 notes ($\boldsymbol{M = 36}$)
   a) $9 = 3^2$ et $12 = 2^2 \times 3$
   b) $M = 24 = 2^2 \times 3^2$

4. On prend tous les facteurs premiers présents dans la décomposition des deux nombres de départ (dans les exemples, il s'agit des facteurs 2 et 3), et on élève chacun à la puissance la plus grande apparaissant dans la décomposition des deux nombres.

Bilan :

**Propriété :** Le PPCM de deux nombres entiers naturels non nuls est égal au produit de tous les facteurs premiers apparaissant dans la décomposition des deux nombres, chacun étant élevé à la puissance la plus grande apparaissant dans les deux décompositions.

## Exercice 6 : Décalage de 10 notes, motif initial de 12

Déterminer, avec la propriété précédente, le PPCM de 10 et 12.

Correction : on trouve $PPCM(10; 12) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

## Exercice 7 : Décalage de 11 notes, motif initial de 12

Déterminer, avec la propriété précédente, le PPCM 11 et 12.

Correction : on trouve $PPCM(11; 12) = 2^2 \times 3 \times 11 = 132$.

Synthèse des résultats : On a déterminé toutes les possibilités pour le motif initial de 12 notes utilisé par Steve Reich. Compléter alors le tableau récapitulatif ci-dessous :

Correction : Il ne reste que les deux dernières lignes à compléter.

| Nombre de notes du motif initial | Nombre de notes du décalage | Nombre de décalages | $M$ | Nombre total de notes du morceau |
|---|---|---|---|---|
| 12 | 1 | 12 | 12 | 144 |
| 12 | 2 | 6 | 12 | 72 |
| 12 | 3 | 4 | 12 | 48 |
| 12 | 4 | 3 | 12 | 36 |
| 12 | 5 | 12 | 60 | 144 |
| 12 | 6 | 2 | 12 | 24 |
| 12 | 7 | 12 | 84 | 144 |
| 12 | 8 | 3 | 24 | 36 |
| 12 | 9 | 4 | 36 | 48 |
| 12 | 10 | 6 | 60 | 72 |
| 12 | 11 | 12 | 132 | 144 |

Remarque : la dernière colonne présente une symétrie.

## Exercice 8 : Application à un morceau avec un motif initial quelconque et un décalage quelconque.

Compléter le tableau ci-dessous :

Correction :

| Nombre de notes du motif initial | Nombre de notes du décalage | Nombre de décalages | $M$ | Nombre total de notes du morceau |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 3 | 10 | 30 | 100 |
| 24 | 6 | 4 | 24 | 96 |
| 35 | 15 | 7 | 105 | 245 |
| 105 | 12 | 35 | 420 | 3 675 |
| 140 | 30 | 14 | 420 | 1 960 |
| 450 | 60 | 15 | 900 | 6 750 |