académie Reims

RÉGION ACADÉMIQUE
GRAND EST

MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION NATIONALE
ET DE LA JEUNESSE

MINISTÈRE
DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR,
DE LA RECHERCHE
ET DE L'INNOVATION

Olympiades nationales de mathématiques

Mercredi 11 mars 2020

Candidats suivant la spécialité mathématiques

Seconde partie – de 10h10 à 12h10
Composition par équipe

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

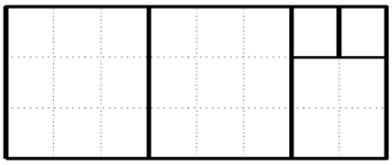
Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice académique 1

Des rectangles avec la tête au carré - Toutes sections

On considère un rectangle de taille $p \times q$ (p est un entier naturel désignant la largeur du rectangle et q est un entier naturel désignant la hauteur), que l'on désignera dans toute la suite par « rectangle (p, q) ». On souhaite paver ce rectangle en utilisant des carrés de taille entière, sans recouvrement (donc deux carrés ne peuvent pas recouvrir une même surface) ni débordement (donc les carrés ne doivent pas dépasser du bord du rectangle). On cherche à déterminer le nombre minimal de carrés noté $N(p, q)$ requis pour le pavage du rectangle (p, q), donnant un pavage dit optimal.



Pavage optimal dans le cas du rectangle $(8,3)$: on utilise cinq carrés donc $N(8,3) = 5$

Partie A - Premières propriétés

1. Donner $N(5,4)$ et $N(3,5)$ en dessinant les pavages correspondants.

2. **a.** Montrer que pour tout entier $p \geq 1$, $N(p, p) = 1$.
b. Donner la valeur de $N(p, 1)$pour tout entier $p \geq 1$.
c. Justifier que pour tous p et q supérieurs ou égaux à 1 : $N(p, q) = N(q, p)$.

3. Donner, sous la forme d'un tableau à double entrée, les valeurs de $N(p, q)$ tels que $1 \leq p \leq q \leq 5$.

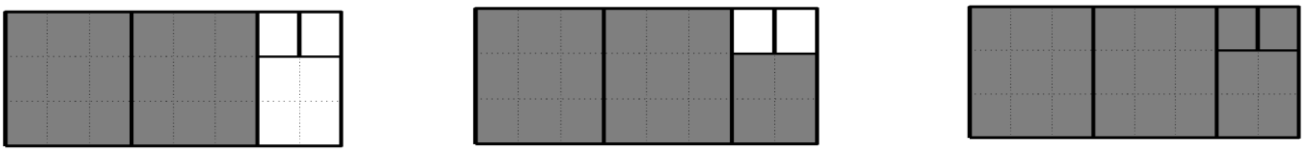
4. Justifier que pour tous p et q supérieurs ou égaux à 1 : $N(p, q) \leq p \times q$

5. Soit n et p deux entiers supérieur ou égaux à 1. Que vaut $N(np, p)$?

6. Donner $N(5,6)$.

Partie B - Stratégie gloutonne

L'une des idées pour paver un rectangle est d'utiliser, à chaque étape, les carrés les plus grands possibles (on parle alors de stratégie gloutonne). Ce raisonnement repose sur des divisions euclidiennes successives : pour paver un rectangle, on effectue la division euclidienne du plus grand côté par le plus petit, on recommence sur la partie non pavée jusqu'à obtenir un pavage complet.
Par exemple, pour le rectangle $(8,3)$:



$8 = 2 \times 3 + 2$ $\qquad$ $3 = 1 \times 2 + 1$ $\qquad$ $2 = 2 \times 1 + 0$

1. En utilisant la stratégie gloutonne, déterminer un pavage des rectangles suivants :
a. $(2,5)$ **b.** $(4,8)$ **c.** $(5,13)$ **d.** $(6,5)$

2. La stratégie gloutonne permet-elle de toujours obtenir un pavage optimal ? Justifier.

3. Montrer que, avec la stratégie gloutonne, il faut p carrés pour paver le rectangle $(p, p - 1)$.

4. On a écrit une partie d'une fonction qui, étant donnés deux entiers p et q, en arguments, retourne le nombre de carrés pavant le rectangle (p, q) par la méthode gloutonne.
$q\%p$ retourne le reste dans la division euclidienne de q par p
$q//p$ retourne le quotient de la division euclidienne de q par p.
Par exemple, $22\%5 = 2$ et $22//5 = 4$ car $22 = 4 \times 5 + 2$
Recopier et compléter les lignes 2 et 5.

```
1  def glouton(p,q) :
2      S = …
3      p , q = q%p , p
4      while p != 0 :
5          S = …
6          p , q = q%p , p
7      return S
```

Partie C - Pavage réductible

On dit que le pavage optimal du rectangle (p, q) est réductible s'il peut être obtenu à partir de pavages de deux rectangles plus petits mis côte à côte (dans le cas contraire, on parle de pavage irréductible).

1. Les pavages optimaux des rectangles $(3,5)$ et $(7,6)$ sont-ils réductibles ? Justifier. (On donne $N(7,6) = 5$)
2. Parmi les rectangles (p, q) avec p et q inférieurs ou égaux à 5, lesquels sont irréductibles ?
3. Montrer que le pavage optimal du rectangle $(13,11)$ est irréductible.

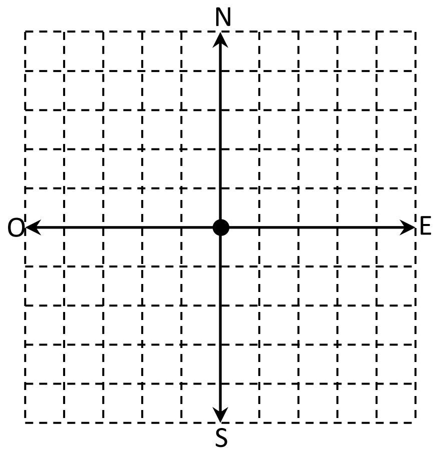
Exercice académique 2
Promenade aléatoire

L'Agence Spatiale a perdu le contact avec son robot d'exploration sur la planète Mars. En l'absence de directives, ce dernier continue son exploration et se déplace selon le protocole suivant. Chaque jour, il :

- choisit une direction au hasard parmi quatre : Nord, Sud, Est et Ouest ;
- avance d'un kilomètre dans cette direction.

La direction choisie un jour ne dépend pas des directions choisies les jours précédents. On convient d'appeler :

- **déplacement**, tout mouvement effectué au cours d'une journée, on notera N, S, E et O respectivement les déplacements d'un kilomètre vers le nord, le sud, l'est et l'ouest ;
- **chemin** de n km, toute suite de n déplacements, pour tout n, entier naturel non nul. Ainsi, (N, N, E, S, E, N) est un chemin de 6 km ; pour simplifier, on le notera NNESEN ;
- **site**, tout lieu occupé par le robot au terme d'un chemin.



La figure ci-contre schématise la situation : le point au centre de la grille symbolise la position du robot au départ. Il peut se déplacer de case en case du quadrillage. Un déplacement vers le nord est symbolisé par un pas vers le haut, etc. On identifiera un site par ses coordonnées : le site de départ a pour coordonnées $(0,0)$; le site à sa droite a pour coordonnées $(1,0)$, etc.

1. **a.** Reproduire la figure sur votre copie et tracer le chemin NNESEN en identifiant le site d'arrivée par une croix, puis le chemin SOONSO en identifiant le site d'arrivée par un carré.
b. Donner un autre chemin de 6 km arrivant au site marqué d'une croix.
c. Combien y a-t-il de chemins de 1 km ? De 2 km ? De 3 km ?
d. De manière générale, combien y a-t-il de chemins de n km ?

2. a. Donner les coordonnées des sites accessibles en un, en deux et en trois déplacements.
   b. Combien de chemin(s) de 1 km mène(nt) à chacun des sites accessibles en un déplacement ?
   c. Donner la liste des chemins de 2 km menant à chacun des sites de coordonnées $(2,0)$, $(1,-1)$ et $(0,0)$.
   d. Donner la liste des chemins de 3 km menant à chacun des sites $(3,0)$ et $(-2,1)$.
3. Quatre jours après avoir perdu le signal, l'Agence Spatiale utilise un satellite pour repérer le robot à la surface de Mars. La zone visible par le satellite est le disque de centre de coordonnées $(-4,3)$ et de rayon 4.
   a. Représenter la situation sur une nouvelle figure.
   b. Énumérer les sites visibles par le satellite et accessibles en quatre déplacements.
   c. Quelle est la probabilité que le robot se trouve dans cette zone au terme du quatrième jour ?
4. On note $\binom{n}{(x,y)}$ le nombre de chemins de n km menant au site de coordonnées (x,y).

   Par convention, on note $\binom{0}{(0,0)} = 1$.

   a. Déterminer les valeurs de $\binom{2}{(1,-1)}$, $\binom{3}{(-1,1)}$, $\binom{3}{(-2,1)}$ et $\binom{4}{(-2,4)}$.
   b. Justifier que, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$ on a $\binom{0}{(x,y)} = 0$.
   c. Montrer que pour tout site (x,y) accessible en n déplacements, on a :
$$\binom{n}{(x,y)} = \binom{n-1}{(x-1,y)} + \binom{n-1}{(x+1,y)} + \binom{n-1}{(x,y-1)} + \binom{n-1}{(x,y+1)}.$$
   d. On souhaite définir, en langage Python, la fonction **nb**(n,x,y) permettant de calculer $\binom{n}{(x,y)}$.

   Reproduire et compléter le script de la fonction Python suivante :

```
def nb(n,x,y) :
    if n==0 :
        if x==0 and y==0 :
            return …………
        else :
            return …………
    else :
        return ……………………………………
```