ACADÉMIE
DE REIMS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques

Mardi 23 mars 2021

Candidats ne suivant pas la spécialité mathématiques

Première partie – de 13h00 à 15h00
Composition individuelle

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice 1

Nombre de diviseurs, somme des diviseurs d'un entier

On rappelle qu'un nombre entier m est un multiple d'un nombre entier d s'il existe un nombre entier q tel que $m = dq$. Dans ce cas, on dit aussi que d est un diviseur de m. Ce vocabulaire ne s'utilise que pour les nombres entiers. Dans la suite, on ne considérera que les diviseurs positifs d'un entier n.

1. Quels sont les diviseurs de 6 ? Quels sont les diviseurs de 101 ? Quels sont les diviseurs de 361 ? Quels sont les diviseurs de 2 021?
2. Quelle est la somme des diviseurs de 6? Quelle est la somme des diviseurs de 101 ? Quelle est la somme des diviseurs de 361 ? Quelle est la somme des diviseurs de 2 021 ?

À tout nombre entier naturel non nul n, on associe le nombre $N(n)$ et la somme $S(n)$ de ses diviseurs.
3. Pour chacun des nombres 6, 101, 361, 2 021 vérifier l'inégalité :

$$2S(n) \leq (n+1)N(n)$$

4. À tout diviseur d d'un entier n non nul on associe l'entier q tel que $n = dq$. Si les diviseurs de n sont $d_1, d_2, d_3, \dots, d_{N(n)-1}, n$, on note respectivement $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{N(n)-1}, 1$ les nombres qui leur sont associés au sens défini ci-dessus.
a. Évaluer la somme $T(n) = d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_{N(n)-1} + n + q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_{N(n)-1} + 1$
b. Si a et b sont des nombres supérieurs ou égaux à 1, montrer que :

$$a + b \leq ab + 1$$

c. En déduire, pour des nombres d et q tels que $dq = n$, l'inégalité

$$d + q \leq n + 1$$

d. En déduire finalement que l'inégalité

$$2S(n) \leq (n+1)N(n)$$

est réalisée pour tout entier naturel n non nul.

5. ***a.*** Avec les notations employées ci-dessus, montrer que l'égalité

$$2S(n) = (n+1)N(n) \quad (*)$$

n'est réalisée que si, pour chacun des diviseurs d de n, l'égalité

$$d + q = n + 1$$

est réalisée.

b. En déduire que seuls 1 et les nombres premiers peuvent satisfaire l'égalité (*)

c. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2

Fractions et pyramides égyptiennes

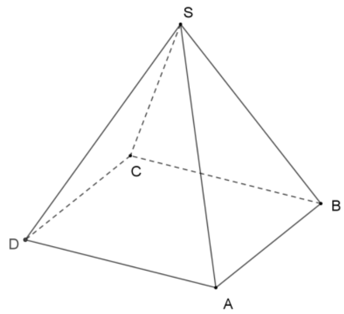
Pour représenter des nombres rationnels, dans l'Egypte antique, les lettrés utilisaient des inverses de nombres entiers naturels, qu'on appelle *fractions égyptiennes* (par exemple $\frac{1}{2}, \frac{1}{7}, \frac{1}{42}$ sont des fractions égyptiennes).

1. Déterminer si chacune des propositions suivantes est vraie ou fausse.
a. La somme de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.
b. Le produit de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.
c. Le quotient de deux fractions égyptiennes quelconques est une fraction égyptienne.

2. On souhaite écrire un nombre rationnel strictement compris entre 0 et 1 comme somme de fractions égyptiennes de dénominateurs tous différents. On dit alors qu'on a effectué une *décomposition égyptienne* du nombre rationnel.
Par exemple,

- $x = \frac{9}{20}$ a pour décomposition égyptienne $x = \frac{9}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.
- $x = \frac{1}{8}$ est déjà une décomposition égyptienne.

On admet que tout nombre rationnel strictement compris entre 0 et 1 admet une telle décomposition.
a. Donner deux décompositions égyptiennes de $\frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire sur l'unicité de la décomposition égyptienne d'un nombre rationnel x tel que $0 < x < 1$?
b. Donner une décomposition égyptienne de $\frac{2}{5}$ puis de $\frac{9}{10}$.



3. On appelle *pyramide égyptienne* une pyramide régulière à base carrée dont les faces sont des triangles isocèles, non équilatéraux, telle que :
- les longueurs des arêtes sont des fractions égyptiennes ;
- la somme des longueurs des arêtes de la pyramide est une fraction égyptienne.
a. Montrer que la pyramide régulière $SABCD$ à base carrée ci-contre, telle que $\mathrm{AB} = \frac{1}{30}$ et $\mathrm{SA} = \frac{1}{20}$, est une pyramide égyptienne

Dans la suite de cette question, on considère une pyramide régulière $SABCD$ à base carrée de sommet S dont les faces latérales sont des triangles isocèles non équilatéraux et dont les longueurs AB et SA sont des *fractions égyptiennes*.
Il existe donc deux entiers naturels non nuls p et q tels que $\mathrm{AB} = \frac{1}{p}$ et $\mathrm{SA} = \frac{1}{q}$ et on suppose que $p > q$.
b. Justifier que si cette pyramide est une pyramide égyptienne alors $p \geq 4$ et $q \geq 4$.
c. Montrer que cette pyramide est une pyramide égyptienne si et seulement s'il existe un entier naturel non nul n tel que $n = \frac{pq}{4p+4q}$.
d. En déduire que si p et q sont des nombres impairs, alors cette pyramide SABCD ne peut pas être une pyramide égyptienne.