ACADÉMIE
DE REIMS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques

Mercredi 09 mars 2022

Candidats ne suivant pas la spécialité mathématiques

Première partie – de 08h00 à 10h00
Composition individuelle

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercice 1

Étiquetage gracieux d'une figure

On considère un ensemble fini de points. On relie certains de ces points par des segments. L'ensemble ainsi constitué est appelé *figure.*
On effectue l'*étiquetage* d'une *figure* comportant n segments en associant à chaque point un entier compris entre 0 et n, ces entiers étant distincts deux à deux.
On attribue à chaque segment la valeur absolue de la différence des entiers associés à ses extrémités. Cet entier est appelé *pondération* du segment.
On dit que l'*étiquetage* de la figure est *gracieux* si les n pondérations obtenues sur les segments sont exactement tous les entiers de 1 à n.
On donne ci-dessous un exemple d'*étiquetage gracieux* d'une figure comportant 6 points et 7 segments :

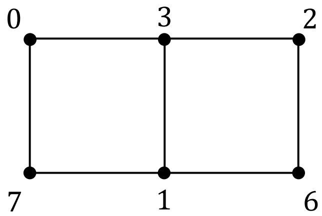


Figure étiquetée

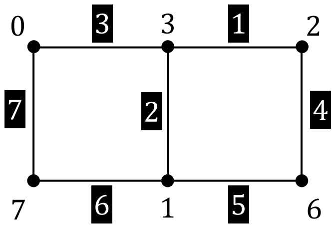
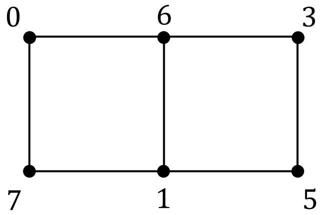
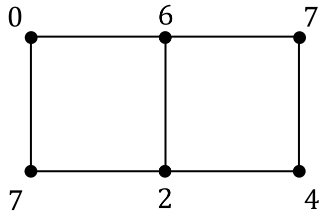


Figure étiquetée avec indication des pondérations

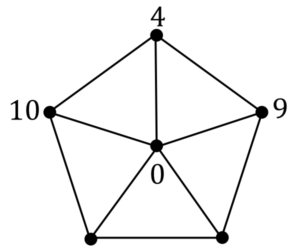
A. Des exemples

1. Pour chacune des figures ci-contre, préciser si l'étiquetage proposé est un étiquetage gracieux.





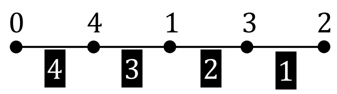
2. Compléter l'étiquetage de la figure ci-contre pour obtenir un étiquetage gracieux.



B. Cas des lignes

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la figure L_n constituée de $n+1$ points alignés et des n segments joignant des points voisins.

On propose ci-contre l'étiquetage gracieux des points de la figure L_4.



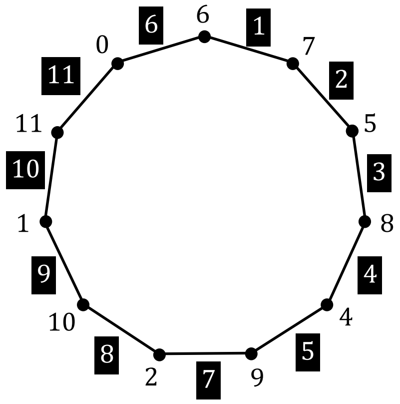
1. Montrer qu'on peut trouver un étiquetage gracieux pour chacune des figures L_5, L_6 et L_7.

2. On admet qu'on peut trouver un étiquetage gracieux pour la figure L_{2022} tel que le point le plus à gauche soit étiqueté avec 0. Décrire cet étiquetage.

C. Cas des polygones

1. Montrer que tout triangle et tout quadrilatère peut être muni d'un étiquetage gracieux.

2. On a représenté ci-contre un polygone à 11 côtés muni d'un étiquetage gracieux.
En déduire un étiquetage gracieux pour un polygone à 12 côtés.



3. Déterminer la parité de la pondération d'un segment lorsque les étiquettes de ses extrémités sont :
- **a.** de parités différentes ;
- **b.** de même parité.

4. En déduire qu'on ne peut pas trouver un étiquetage gracieux pour les pentagones.

D. Une très grande figure

On note K_{2022} la figure constituée de 2022 points telle que tout couple de points est relié par un unique segment.

1. Montrer que K_{2022} est constituée de 2 043 231 segments.

2. On suppose qu'il existe d'un étiquetage gracieux de K_{2022}.
- **a.** Quel est le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair ?
- **b.** On note p le nombre de points étiquetés avec un nombre pair. Exprimer en fonction de p le nombre de segments dont la pondération est un nombre impair.

3. Montrer finalement que K_{2022} ne peut pas être muni d'un étiquetage gracieux.

Exercice 2

Trois

Le protocole suivant permet de construire une suite d'entiers naturels.

Le premier terme de la suite est 4.
Pour passer d'un nombre au suivant, on réalise au choix une des opérations suivantes :

- multiplier le nombre par 3 ;
- multiplier le nombre par 3 puis ajouter 2 ;
- si le nombre est pair, le diviser par 2.

Si une des suites construites de cette façon a pour terme un certain nombre N, on dira que N est *atteignable*.
Par exemple, le nombre 11 est atteignable : on part de 4, on multiplie par 3 pour obtenir 12, on divise deux fois successivement par 2 pour obtenir 3, qu'on multiplie par 3 avant d'ajouter 2.

1. Montrer que tous les entiers naturels compris entre 1 et 12 sont atteignables.

2. Montrer que $2\ 022$ est atteignable.

3. On suppose qu'il existe des entiers non atteignables. On note m le plus petit d'entre eux.

a. Montrer que m n'est pas un multiple de 3.
b. Montrer que $m-2$ n'est pas un multiple de 3.
c. Montrer que $m-1$ n'est pas non plus un multiple de 3.
d. Conclure.