ACADÉMIE
DE REIMS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques

Mercredi 15 mars 2023

Candidats suivant la spécialité mathématiques de la voie générale

Première partie – de 08h00 à 10h00
Composition individuelle

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercice 1 - PLUS FORT !

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Un joueur dispose de n cartes numérotées de 1 à n. Il les mélange puis note dans l'ordre la suite des numéros des cartes obtenue. On appelle liste la suite des numéros ainsi observés.
Le nombre n sera appelé longueur de la liste.
Par exemple, avec $n = 8$, une liste possible est $L = [2,5,7,6,1,8,4,3]$.
Avec une liste donnée, le joueur marque un point chaque fois que le numéro d'une carte est supérieur à celui de la carte précédente.
Par exemple avec la liste $L = [2, \mathbf{5}, \mathbf{7}, 6, 1, \mathbf{8}, 4, 3]$, le joueur marque 3 points.
On appelle *score* le nombre de points marqués par le joueur. Le score précédent est donc 3.

1. Quelques exemples

a. Donner un autre exemple de liste de longueur 8 et de score 3.
b. Donner toutes les listes de longueur 3 possibles ainsi que les scores correspondants.

2. Écrire sur votre copie la syntaxe d'une fonction Python qui, prenant en argument une liste L et sa longueur n, renvoie le score de la liste L.

On revient au cas général ainsi qu'à des considérations théoriques.

3. Démontrer que tout score est compris entre 0 et $n - 1$. Donner une liste dont le score vaut 0 et une liste dont le score vaut $n - 1$.

4. Soit k un entier compris entre 1 et $n - 2$.
a. Démontrer qu'il existe une liste de longueur n et de score k.
b. Peut-on trouver deux listes de longueur n et de score k ?

On note désormais $L_n(s)$ le nombre de listes de longueur n et de score s.

5. Déterminer $L_n(0)$ et $L_n(n-1)$.

6. Une relation de récurrence

a. Déterminer $L_3(0), L_3(1)$ et $L_3(2)$. Comment insérer dans la liste [3,1,2] la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score vaut encore 1 ?
b. Comment insérer dans la liste [3,2,1] la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score reste nul ?
c. Vérifier que $L_4(1) = 2L_3(1) + 3L_3(0)$.
d. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$,

$$L_{n+1}(1) \ = 2L_n(1) + nL_n(0).$$

e. Pour tout n et pour tout entier naturel k non nul, exprimer $L_{n+1}(k)$ à l'aide de $L_n(k)$ et $L_n(k-1)$.
f. Dresser un tableau des valeurs de $L_n(k)$ pour $n \in \{3, 4, 5\}$ et $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Exercice 2 - UNE DESCENTE INFINIE

Dans tout l'exercice, α désigne un entier naturel supérieur ou égal à 4.

On considère l'équation (E) ci-dessous dont l'inconnue est le triplet d'entiers relatifs $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3$.

$$\text{(E)} : \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha x_1 x_2 x_3$$

Le but de l'exercice est de démontrer que le seul triplet dans $\mathbf{Z}^3$ solution de (E) est $(0,0,0)$.

Partie 1

Soient b et c deux réels. On considère la fonction polynôme P de **R** dans **R** définie par $P(x) = x^2 + bx + c$. Un réel r tel que $P(r) = 0$ est appelé *racine* de P. On suppose dans cette partie que P admet deux racines distinctes, r_1 et r_2. Ainsi, $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)$ pour tout réel x.

1. Exprimer b et c en fonction de r_1 et r_2.

2. On suppose ici $b \leq 0$ et $c \geq 0$

Que peut-on dire du signe de r_1 et r_2 ?

Partie 2

1. ***a.*** On suppose que le triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3$ est solution de l'équation (E). Montrer que $(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ est aussi solution de l'équation (E).

b. En déduire que, s'il existe un triplet d'entiers relatifs différent de $(0,0,0)$ solution de l'équation (E), alors il existe un triplet d'entiers naturels différent de $(0,0,0)$ solution de l'équation (E).

2. Si le triplet $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{Z}^3$ est solution de l'équation (E), que dire du triplet (x_2, x_1, x_3) ?

3. En déduire que, si l'équation (E) admet une solution dans $\mathbf{Z}^3$ différente du triplet $(0,0,0)$, alors elle admet une solution (x_1, x_2, x_3) dans $\mathbf{N}^3$ différente du triplet $(0,0,0)$ et telle que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$.

Partie 3

On suppose donc dans cette partie qu'il existe un triplet d'entiers naturels (x_1, x_2, x_3) différent de $(0,0,0)$ solution de (E) et tel que $x_1 \leq x_2 \leq x_3$. On fixe un tel triplet.

1. Démontrer que $x_1 > 0$.

2. On définit la fonction Q de **R** dans **R** par $Q(x) = x^2 - \alpha x_1 x_2 x + x_1^2 + x_2^2$.

Un réel r tel que $Q(r) = 0$ est appelé *racine* de Q.

a. Soit y un réel. Montrer que (x_1, x_2, y) est solution de (E) si, et seulement si, y est une racine de Q.

b. Indiquer une première racine de Q à partir des données de l'énoncé.

c. Vérifier que $Q(x_2) = (3 - \alpha x_1)x_2^2 + (x_1^2 - x_2^2)$ et en déduire que $Q(x_2) < 0$.

d. Quel est le signe de $Q(0)$?

e. Démontrer que Q a deux racines distinctes : celle donnée précédemment et une autre notée y ; ranger dans l'ordre croissant les nombres $0, x_2$ et x_3 et y et justifier qu'ils sont tous distincts.

f. Montrer que (x_1, x_2, y) est un triplet d'entiers naturels solution de l'équation (E).

3. Que donne le raisonnement de la question 2 en remplaçant le triplet solution (x_1, x_2, x_3) par le triplet constitué de x_1, x_2, y rangés dans l'ordre croissant ?

4. Expliquer comment aboutir à une absurdité et conclure quant aux triplets d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

5. Démontrer le résultat suivant :

« Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ avec $\alpha > n \geq 2$.

L'équation $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = \alpha x_1 \ldots x_n$ d'inconnue $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n'admet pas de n-uplet d'entiers relatifs solution autre que $(0,0, \ldots ,0)$. »