ACADÉMIE
DE REIMS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques

Mercredi 15 mars 2023

Candidats ne suivant pas la spécialité mathématiques de la voie générale

Première partie – de 08h00 à 10h00
Composition individuelle

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercice 1 - PLUS FORT !

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Un joueur dispose de n cartes numérotées de 1 à n. Il les mélange puis note dans l'ordre la suite des numéros des cartes obtenue. On appelle liste la suite des numéros ainsi observés.
Le nombre n sera appelé longueur de la liste.
Par exemple, avec $n = 8$, une liste possible est $L = [2,5,7,6,1,8,4,3]$.
Avec une liste donnée, le joueur marque un point chaque fois que le numéro d'une carte est supérieur à celui de la carte précédente.
Par exemple avec la liste $L = [2, \mathbf{5}, \mathbf{7}, 6, 1, \mathbf{8}, 4, 3]$, le joueur marque 3 points.
On appelle *score* le nombre de points marqués par le joueur. Le score précédent est donc 3.

1. Quelques exemples

a. Donner un autre exemple de liste de longueur 8 et de score 3.

b. Donner toutes les listes de longueur 3 possibles ainsi que les scores correspondants.

2. Écrire sur votre copie la syntaxe d'une fonction Python qui, prenant en argument une liste L et sa longueur n, renvoie le score de la liste L.

On revient au cas général ainsi qu'à des considérations théoriques.

3. Démontrer que tout score est compris entre 0 et $n - 1$. Donner une liste dont le score vaut 0 et une liste dont le score vaut $n - 1$.

4. Soit k un entier compris entre 1 et $n - 2$.

a. Démontrer qu'il existe une liste de longueur n et de score k.

b. Peut-on trouver deux listes de longueur n et de score k ?

On note désormais $L_n(s)$ le nombre de listes de longueur n et de score s.

5. Déterminer $L_n(0)$ et $L_n(n - 1)$.

6. Une relation de récurrence

a. Déterminer $L_3(0), L_3(1)$ et $L_3(2)$. Comment insérer dans la liste [3,1,2] la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score vaut encore 1 ?

b. Comment insérer dans la liste [3,2,1] la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score reste nul ?

c. Vérifier que $L_4(1) = 2L_3(1) + 3L_3(0)$.

d. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$,

$$L_{n+1}(1) = 2L_n(1) + nL_n(0).$$

e. Pour tout n et pour tout entier naturel k non nul, exprimer $L_{n+1}(k)$ à l'aide de $L_n(k)$ et $L_n(k - 1)$.

f. Dresser un tableau des valeurs de $L_n(k)$ pour $n \in \{3, 4, 5\}$ et $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Exercice 2 - CODES DÉTECTEURS ET CORRECTEURS

Question préliminaire

1. Soient a et b deux nombres entiers.
Montrer que le nombre $a + b$ est pair si, et seulement si, a et b sont de la même parité.

Codage d'un message

Un *message* est ici un nombre M codé sous la forme d'un quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4) où x_1, x_2, x_3 et x_4 sont des « bits », c'est-à-dire des nombres ne pouvant valoir que 0 ou 1. Le nombre M que représente le quadruplet (x_1, x_2, x_3, x_4), appelé aussi demi-octet *d'information*, vaut par définition :

$$M = x_1 + 2 \times x_2 + 4 \times x_3 + 8 \times x_4$$

Par exemple, le code $(0,0,1,1)$ représente le nombre $M = 12$ puisque $12 = 0 + 2 \times 0 + 4 \times 1 + 8 \times 1$.

2. ***a.*** Quel est le message M que code le quadruplet $(1,0,0,1)$?
b. Trouver un code qui représente $M = 10$. Trouver un code qui représente $M = 15$.
c. Peut-on trouver un code pour représenter $M = 20$?
d. Quels sont les différents messages possibles ?

Un message est parfois altéré (on dit aussi « corrompu ») lors de sa transmission du fait d'un matériel défectueux ou de signaux parasites. Des erreurs modifient des bits, un 0 se transformant en 1 ou un 1 se transformant en 0. Aussi des techniques permettant de détecter et de corriger ces anomalies ont-elles été mises au point. Ceci fait l'objet de la suite.

Codage d'un message avec protection contre les erreurs

3. ***Principe du bit de parité***

Le code (x_1, x_2, x_3, x_4) est transformé en le quintuplet (x_1, x_2, x_3, x_4, y), dont le dernier bit y, dit de *parité*, vaut 0 si la somme $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ est paire, et 1 si elle est impaire. C'est ce quintuplet qui est transmis, il représente le même message M que le code (x_1, x_2, x_3, x_4), à savoir $M = x_1 + 2 \times x_2 + 4 \times x_3 + 8 \times x_4$. Les bits dits d'information demeurent x_1, x_2, x_3, x_4 et le bit de parité, y, est transmis avec les plus grandes précautions.
Par exemple, pour transmettre le nombre $M = 12$ correspondant à $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ et $x_4 = 1$, on calcule d'abord $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$, qui est pair ; on pose donc $y = 0$ et on émet le quintuplet $(0,0,1,1,0)$.

a. Quel est le bit y de parité associé au quadruplet $(1,0,0,1)$ codant le nombre $M = 9$ à l'émission ?
b. On reçoit le quintuplet $(1,1,0,1,0)$ dont on suppose le bit de parité (le cinquième, donc) fiable. Justifier que l'information véhiculée par le code a été corrompue.
c. Si on est sûr du bit de parité, peut-on détecter une altération, et peut-on la localiser
- dans le cas où un seul bit d'information est faux à l'arrivée ?
- dans le cas où deux bits d'information sont faux à l'arrivée ?

4. ***Principe des bits de contrôle***

Le code (x_1, x_2, x_3, x_4) est transformé en l'heptuplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$, où
$y_1 = 0$ si $x_1 + x_2 + x_3$ est pair, $y_1 = 1$ sinon ; $y_2 = 0$ si $x_2 + x_3 + x_4$ est pair, $y_2 = 1$ sinon ; $y_3 = 0$ si $x_1 + x_3 + x_4$ est pair, $y_3 = 1$ sinon. Les bits dits d'information demeurent x_1, x_2, x_3, x_4.
L'heptuplet $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3)$ code toujours le message $M = x_1 + 2 \times x_2 + 4 \times x_3 + 8 \times x_4$.

a. Quels sont les bits y_1, y_2, y_3, dits de *contrôle*, associés au quadruplet $(1,0,0,1)$ codant le nombre $M = 9$?
b. Pourquoi est-on certain que l'heptuplet reçu $(1,1,0,1,0,0,1)$ résulte d'une altération de transmission dans le cas où on est sûr des bits de contrôle ?
c. Si on est sûr de la justesse des bits de contrôle, dans l'hypothèse où exactement un des quatre bits d'information est erroné, pourquoi peut-on détecter qu'il y a eu une altération et pourquoi peut-on la localiser (et donc la corriger) ? Peut-on détecter l'erreur quand exactement deux des quatre bits d'information sont erronés ?