

Olympiades nationales de mathématiques

Mercredi 20 mars 2024

Candidats suivant la spécialité
mathématiques de la voie générale

Première partie – de 08h00 à 10h00
Composition individuelle

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercice 1 – Plus fort !

Dans cet exercice, toutes les questions et sous-questions sont, dans une large mesure, indépendantes.

À partir de la 7., certaines montent crescendo en difficulté. Toutes les réponses devront être argumentées.

1. Pourcentages pour tous les âges.

- a. Est-il exact que pour tous nombres réels positifs x et y , $x\%$ de y euros valent $y\%$ de x euros ? En déduire sans calcul compliqué ce que valent 32 % de 25 euros.
- b. Est-il exact que, pendant les soldes, après 4 baisses consécutives de 25 %, un article devient gratuit ?
- c. On passe d'un prix HT (hors taxe) à un prix TTC (toutes taxes comprises) en augmentant le prix HT de 20 %. Si le prix TTC d'un article est 2 fois plus élevé dans un magasin que dans un autre, le prix HT l'est-il aussi ?

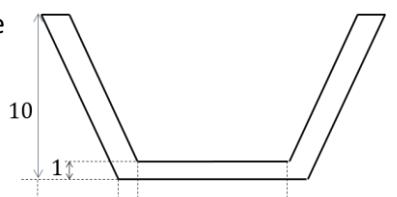
2. Double sens. Donner deux reformulations très différentes à la question « Quel nombre donne 51 quand on le multiplie par 0,01 ? » pour en lever l'ambiguïté, et apporter les deux réponses très différentes possibles.

3. Le secret pour avoir 20/20. Un sujet d'examen, noté sur 20, comprend un exercice noté sur 5 et un problème, noté sur 15. Un candidat reçoit la note de 4 sur 5 à l'exercice et de 3 sur 15 au problème. Quelle est sa note sur 20 ? Pourtant, le calcul fractionnaire démontre que $\frac{4}{5} + \frac{3}{15} = \frac{20}{20}$ (résultat à justifier). Avancer une raison à ce paradoxe et démontrer, dans le même contexte d'un exercice sur 5 et d'un problème sur 15, que le second calcul donne toujours un meilleur résultat que le premier.

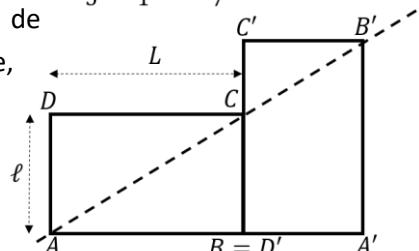
4. Trouver l'intrus. On dispose d'une balance à deux plateaux comme sur la figure ci-contre. Soient 5 oranges indiscernables au toucher et à la vue ; 4 ont exactement le même poids et 1 est un peu moins lourde. Proposer un protocole permettant, en 2 pesées au maximum, de détecter l'orange la moins lourde. Soient maintenant 2 024 oranges indiscernables au toucher et à la vue ; 2 023 ont exactement le même poids et 1 est un peu moins lourde. Proposer un protocole permettant, en 10 pesées au maximum, de détecter l'orange la moins lourde.



5. Tchin ! Un verre est représenté en coupe méridienne (unité en cm ; la figure n'est pas à l'échelle ; les parois intérieures et extérieures sont parallèles). On y empile un second verre, du même modèle. À quelle hauteur s'élève l'ensemble ? On accompagnera sa rédaction d'un croquis.



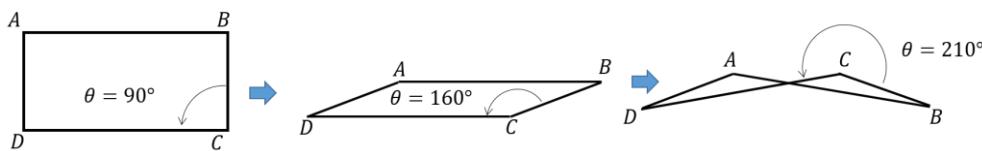
6. Le début de la richesse. Deux rectangles $ABCD$ et $A'B'C'D'$ identiques de largeur ℓ et de longueur $L > \ell$ sont juxtaposés comme sur la figure ci-contre, où le premier est posé horizontalement et le second dressé verticalement.



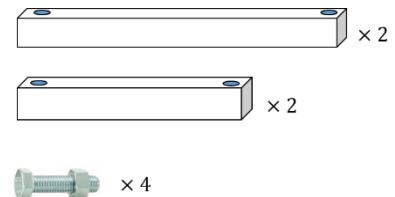
Montrer que les points ACB' sont alignés quand $\frac{L}{\ell} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

(Après l'épreuve, essayez avec deux rectangles au format CB (« carte bleue »), vous verrez, cela fonctionne !)

7. Quelle forme !? Un rectangle $ABCD$ est articulé en ses quatre sommets. Il peut donc se déformer en parallélogramme, puis en contre-parallélogramme en jouant sur l'ouverture $\theta = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$ comme ci-dessous. Dessiner les configurations obtenues quand les angles mesurent successivement $\theta = 120^\circ$, puis $\theta = 180^\circ$ puis

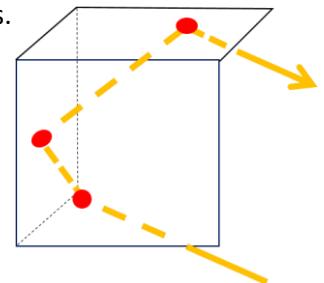


$\theta = 225^\circ$. On laissera apparents les traits de construction et on choisira DC trois fois plus grand que AD . On dispose ensuite de quatre barrettes parallélépipédiques (percées en leurs extrémités) : deux longues et deux courtes (trois fois plus petites que les longues), et de quatre boulons (un boulon est composé d'une vis et d'un écrou). Dessiner en perspective les assemblages possibles vous permettant de fabriquer un parallélogramme articulé avec ces fournitures. Cependant, quel est le seul assemblage laissant le mécanisme se déformer jusqu'au contre-parallélogramme ?

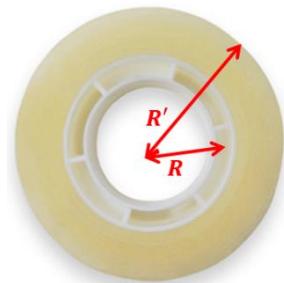


8. Rien que pour vos yeux. Un coin de cube est constitué de trois miroirs perpendiculaires.

En général, un rayon incident qui vient frapper l'un des miroirs est ensuite réfléchi sur les deux autres avant de repartir. Par exemple, sur le dessin en regard, le rayon lumineux rebondit trois fois : il frappe d'abord la face avant, puis la face latérale gauche, puis la face supérieure. Expliquer pourquoi le rayon qui repart est alors parallèle au rayon qui arrivait. En déduire l'intérêt d'un tel dispositif pour fabriquer les catadioptres situés à l'arrière des bicyclettes et des automobiles.



9. Un rouleau de bande adhésive a pour rayon intérieur $R = 1,8$ cm et pour rayon extérieur $R' = 2,6$ cm. La bande adhésive mesure 25 m de long. Déterminer le plus précisément possible son épaisseur.



10. Un tableau de n lignes et p colonnes contient des nombres réels. On réarrange chaque ligne de gauche à droite dans l'ordre croissant, puis chaque colonne de bas en haut dans l'ordre croissant comme sur l'exemple ci-contre (où $n = 3$ et $p = 5$). Démontrer qu'à l'issue de cette seconde opération chaque ligne demeure bien classée, toujours dans l'ordre croissant de gauche à droite donc.

1	8	3	4	8
0	9	2	7	14
20	3	7	7	7
↓				
1	3	4	8	8
0	2	7	9	14
3	7	7	7	20
↓				
3	7	7	9	20
1	3	7	8	14
0	2	4	7	8

Exercice 2 – Nous sommes toutes distinctes

Dans cet exercice, le symbole n désigne un entier naturel, avec $n \geq 1$; tous les ensembles considérés sont non vides, finis et constitués de nombres réels distincts ; de plus on conviendra d'écrire tout ensemble fini $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ à n éléments réels distincts en ordonnant toujours a_1, a_2, \dots, a_n si bien que

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

Étant donné un tel ensemble, on note $S(A)$ la somme de ses éléments, soit :

$$S(A) = a_1 + \dots + a_n$$

En particulier, lorsque $n = 1$ et donc $A = \{a_1\}$ est un singleton, $S(A) = a_1$.

On dit que l'ensemble A est *à sommes toutes distinctes* (en abrégé que A est STD) quand, pour toutes parties non vides distinctes Y et Z de A , $S(Y) \neq S(Z)$. Cela revient à demander aux $2^n - 1$ sommes que l'on peut former avec des éléments de A d'être toutes distinctes.

Par exemple $A = \{1, 2, 5\}$ est STD parce que les nombres $1, 2, 5, 1 + 2 = 3, 2 + 5 = 7, 1 + 5 = 6, 1 + 2 + 5 = 8$ sont tous distincts. En revanche, $A = \{2, 4, 6, 7\}$ n'est pas STD parce qu'en prenant $Y = \{2, 4, 7\}$ et $Z = \{6, 7\}$, on a $S(Y) = 2 + 4 + 7 = 13 = S(Z)$, bien que $Y \neq Z$.

Partie 1 : Exemples et contre-exemples simples

1. Expliquer pourquoi le nombre de sommes à envisager pour étudier le caractère STD de A vaut $2^n - 1$.
2. Montrer que l'ensemble $\{1, 3, 5\}$ est STD mais que l'ensemble $\{4, 6, 7, 9\}$ ne l'est pas.
3. Quel(s) ensemble(s) A contenant 0 est (sont) STD ?
4. Soient A et B deux ensembles non vides et finis de réels distincts, avec $A \subset B$ (c'est-à-dire que A est un sous-ensemble de B).
 - a. Si B est STD ; justifier que A l'est aussi.
 - b. L'ensemble B peut-il être STD si A ne l'est pas ?
5. Soit A un ensemble non vide et fini de réels distincts. On suppose que A n'est constitué que de nombres entiers et qu'il est STD. Justifier que $A \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$ puis que $A \cup \left\{\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right\}$ sont aussi STD.

Partie 2 : Construction d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence, valable pour tout $n \geq 1$,

$$u_{n+1} = u_1 + \dots + u_n + 1$$

6. Vérifier que $u_2 = 2$ et $u_3 = 4$. Calculer u_5 .
7. Rédiger sur votre copie un programme en langage Python qui renverrait u_{100} (qu'on ne calculera pas).
8. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
9. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\{u_1, \dots, u_n\}$ est STD.
10. Montrer que (u_n) est en fait une suite géométrique que l'on déterminera.

Partie 3 : Suites STD

Une *suite* (u_n) est dite STD lorsqu'elle est strictement croissante, qu'elle est composée d'entiers strictement positifs, et que pour tout $n \geq 1$, l'ensemble $\{u_1, \dots, u_n\}$ est STD. Par exemple, la suite étudiée en **partie 2** est une suite STD.

11. Soit (u_n) une suite STD quelconque.

- a. Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$u_1 + \dots + u_n \geq 2^n - 1$$

b. En déduire que pour tout $n \geq 2$:

$$u_n \geq \frac{2^n}{n}$$

12. Le but de cette question est d'affiner la minoration obtenue à la question précédente. Pour ce faire, nous aurons recours aux probabilités, et nous dirons qu'une variable aléatoire X à valeurs dans un ensemble réel fini non vide $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ à n éléments distincts suit une loi uniforme quand toutes les valeurs qu'elle peut atteindre sont équiprobables. Ainsi,

$$P(X = a_1) = P(X = a_2) = \dots = P(X = a_n) = \frac{1}{n}$$

a. Soit (u_n) une suite STD quelconque. Pour $n \geq 2$ on considère les variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n qui suivent la loi uniforme sur la paire $\{-1, 1\}$: ainsi, pour chacun des indices i , $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}$. On pose $X = u_1X_1 + \dots + u_nX_n$.

On admet que $E(X) = u_1E(X_1) + \dots + u_nE(X_n)$ et que $V(X) = u_1^2V(X_1) + \dots + u_n^2V(X_n)$.

Après avoir justifié que $E(X_1) = 0$ et $V(X_1) = 1$, calculer l'espérance $E(X)$ et exprimer la variance $V(X)$ en fonction de u_1, u_2, \dots, u_n .

b. Montrer que X suit une loi uniforme sur un ensemble de 2^n entiers relatifs, symétrique par rapport à 0, et dont les éléments sont non nuls et de la même parité.

c. En déduire que pour $n \geq 1$

$$u_n^2 \geq \frac{1}{n 2^{n-1}}(1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2^n - 1)^2)$$

d. Proposer une valeur de $n \geq 2$ pour laquelle cette inégalité fournit un minorant plus grand qu'en **11.b.**