ACADÉMIE
DE REIMS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques

Mercredi 20 mars 2024

Candidats ne suivant pas la spécialité mathématiques de la voie générale

Première partie – de 08h00 à 10h00
Composition individuelle

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d’exposer le bilan des initiatives qu’ils ont pu prendre.

Exercice 1 – Plus fort !

Dans cet exercice, toutes les questions et sous-questions sont, dans une large mesure, indépendantes.
À partir de la **7.**, certaines montent crescendo en difficulté. Toutes les réponses devront être argumentées.

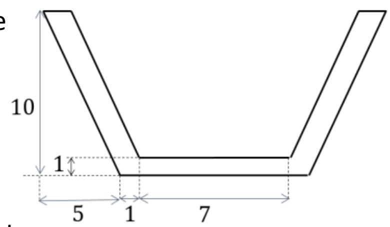
1. *Pourcentages pour tous les âges.*
a. Est-il exact que pour tous nombres réels positifs x et y, x % de y euros valent y % de x euros ? En déduire sans calcul compliqué ce que valent 32 % de 25 euros.
b. Est-il exact que, pendant les soldes, après 4 baisses consécutives de 25 %, un article devient gratuit ?
c. On passe d'un prix HT (hors taxe) à un prix TTC (toutes taxes comprises) en augmentant le prix HT de 20 %. Si le prix TTC d'un article est 2 fois plus élevé dans un magasin que dans un autre, le prix HT l'est-il aussi ?

2. *Double sens.* Donner deux reformulations très différentes à la question « Quel nombre donne 51 quand on le multiplie par 0,01 ? » pour en lever l'ambiguïté, et apporter les deux réponses très différentes possibles.

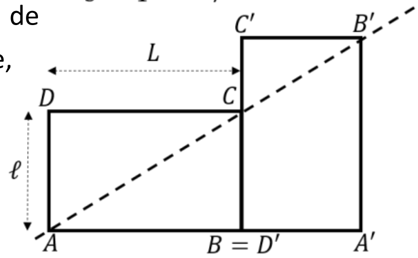
3. *Le secret pour avoir* $20/20$. Un sujet d'examen, noté sur 20, comprend un exercice noté sur 5 et un problème, noté sur 15. Un candidat reçoit la note de 4 sur 5 à l'exercice et de 3 sur 15 au problème. Quelle est sa note sur 20 ? Pourtant, le calcul fractionnaire démontre que $\frac{4}{5} + \frac{3}{15} = \frac{20}{20}$ (résultat à justifier). Avancer une raison à ce paradoxe et démontrer, dans le même contexte d'un exercice sur 5 et d'un problème sur 15, que le second calcul donne toujours un meilleur résultat que le premier.

4. *Trouver l'intrus.* On dispose d'une balance à deux plateaux comme sur la figure ci-contre. Soient 5 oranges indiscernables au toucher et à la vue ; 4 ont exactement le même poids et 1 est un peu moins lourde. Proposer un protocole permettant, en 2 pesées au maximum, de détecter l'orange la moins lourde. Soient maintenant 2 024 oranges indiscernables au toucher et à la vue ; 2 023 ont exactement le même poids et 1 est un peu moins lourde. Proposer un protocole permettant, en 10 pesées au maximum, de détecter l'orange la moins lourde.

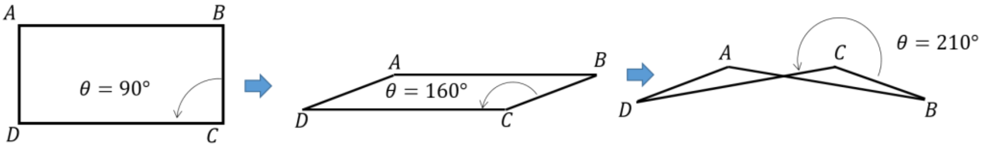
5. *Tchin !* Un verre est représenté en coupe méridienne (unité en cm ; la figure n'est pas à l'échelle ; les parois intérieures et extérieures sont parallèles). On y empile un second verre, du même modèle. À quelle hauteur s'élève l'ensemble ? On accompagnera sa rédaction d'un croquis.



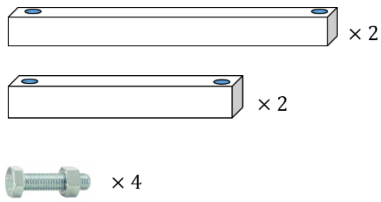
6. *Le début de la richesse.* Deux rectangles $ABCD$ et $A'B'C'D'$ identiques de largeur ℓ et de longueur $L > \ell$ sont juxtaposés comme sur la figure ci-contre, où le premier est posé horizontalement et le second dressé verticalement.
Montrer que les points ACB' sont alignés quand $\frac{L}{\ell} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
(Après l'épreuve, essayez avec deux rectangles au format CB (« carte bleue »), vous verrez, cela fonctionne !)



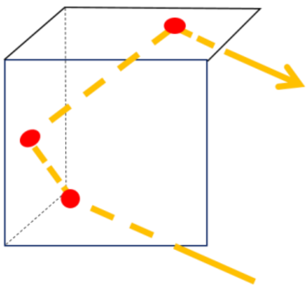
7. *Quelle forme !?* Un rectangle $ABCD$ est articulé en ses quatre sommets. Il peut donc se déformer en parallélogramme, puis en contre-parallélogramme en jouant sur l'ouverture $\theta = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right)$ comme ci-dessous. Dessiner les configurations obtenues quand les angles mesurent successivement $\theta = 120°$, puis $\theta = 180°$ puis



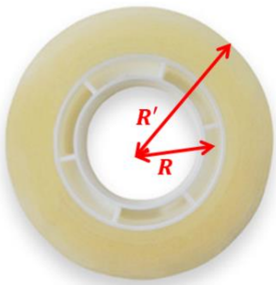
$\theta = 225°$. On laissera apparents les traits de construction et on choisira DC trois fois plus grand que AD. On dispose ensuite de quatre barrettes parallélépipédiques (percées en leurs extrémités) : deux longues et deux courtes (trois fois plus petites que les longues), et de quatre boulons (un boulon est composé d'une vis et d'un écrou). Dessiner en perspective les assemblages possibles vous permettant de fabriquer un parallélogramme articulé avec ces fournitures. Cependant, quel est le seul assemblage laissant le mécanisme se déformer jusqu'au contre-parallélogramme ?



8. *Rien que pour vos yeux.* Un coin de cube est constitué de trois miroirs perpendiculaires. En général, un rayon incident qui vient frapper l'un des miroirs est ensuite réfléchi sur les deux autres avant de repartir. Par exemple, sur le dessin en regard, le rayon lumineux rebondit trois fois : il frappe d'abord la face avant, puis la face latérale gauche, puis la face supérieure. Expliquer pourquoi le rayon qui repart est alors parallèle au rayon qui arrivait. En déduire l'intérêt d'un tel dispositif pour fabriquer les catadioptres situés à l'arrière des bicyclettes et des automobiles.



9. Un rouleau de bande adhésive a pour rayon intérieur $R = 1{,}8$ cm et pour rayon extérieur $R' = 2{,}6$ cm. La bande adhésive mesure 25 m de long. Déterminer le plus précisément possible son épaisseur.



10. Un tableau de n lignes et p colonnes contient des nombres réels. On réarrange chaque ligne de gauche à droite dans l'ordre croissant, puis chaque colonne de bas en haut dans l'ordre croissant comme sur l'exemple ci-contre (où $n = 3$ et $p = 5$). Démontrer qu'à l'issue de cette seconde opération chaque ligne demeure bien classée, toujours dans l'ordre croissant de gauche à droite donc.

1	8	3	4	8
0	9	2	7	14
20	3	7	7	7

1	3	4	8	8
0	2	7	9	14
3	7	7	7	20

3	7	7	9	20
1	3	7	8	14
0	2	4	7	8

Exercice 2 – Pyramides de Pascal

1. *Question préliminaire.* Rappeler pourquoi la somme $1 + 2 + \cdots + n$ des n premiers entiers non nuls, avec $n \geq 1$, est égale à $n(n+1)/2$.

Une *pyramide de Pascal* est un tableau triangulaire composé d'entiers naturels et formé de la manière suivante : sa ligne du haut contient un nombre, la suivante deux nombres, etc. De plus, sur toutes les lignes sauf la dernière (celle du bas), chaque nombre doit être égal à la distance entre les deux nombres situés juste en dessous, l'un à sa gauche et l'autre à sa droite.

Ci-dessous est représentée, en quelques étapes, la construction d'un tel triangle ayant 4 lignes :

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \_ & & & \\
 & & \_ & & \_ & & \\
 & \_ & & \_ & & \_ & \\
8 & & 4 & & 10 & & 7
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \_ & & & \\
 & & \_ & & \_ & & \\
 & 4 & & 6 & & 3 & \\
8 & & 4 & & 10 & & 7
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad \dots \quad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 2 & & 3 & & \\
 & 4 & & 6 & & 3 & \\
8 & & 4 & & 10 & & 7
\end{array}
$$

2. *Quelques exemples*

a. Construire la pyramide de Pascal à 4 lignes dont la dernière ligne est constituée, dans cet ordre d'exposition, des nombres entiers : 4, 3, 9 et 7 (4 est donc tout à gauche et 7 tout à droite).

b. Construire une pyramide de Pascal à 3 lignes en utilisant exclusivement les nombres entiers 1, 2, 3.

3. *Nombre d'entiers dans une pyramide de Pascal*

a. Combien de nombres (distincts ou pas) sont écrits dans une pyramide de Pascal à 3 lignes ? à 4 lignes ?

b. Soit $n \geq 2$. Combien de nombres (distincts ou pas) sont écrits dans une pyramide de Pascal à n lignes ?

Dans la suite, on dira qu'une pyramide de Pascal est *parfaite* si elle contient exactement une fois tous les entiers entre 1 et le nombre total d'entiers du triangle. Par exemple, cette pyramide de Pascal à 3 lignes est parfaite :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & & \\
 & 3 & & 5 & \\
4 & & 1 & & 6
\end{array}
$$

4. Soit $n \geq 2$. Montrer que s'il existe une pyramide parfaite à n lignes, alors le plus grand entier qu'elle possède est situé sur la ligne du bas. Quel est cet entier ?

5. Construire une pyramide de Pascal parfaite à 3 lignes dont le nombre 6 est situé en bas et au milieu.

6. L'objet de cette question est de montrer que dans une pyramide de Pascal parfaite à n lignes, et sauf à avoir $n \leq 3$, le nombre $n(n+1)/2$ ne peut être situé ni en bas tout à droite, ni en bas tout à gauche.

a. Justifier qu'il suffit d'établir qu'il ne peut être situé en bas tout à droite.

On suppose dans la suite que le nombre $n(n+1)/2$ est situé en bas tout à droite.

b. On considère alors le chemin qui part du sommet de la pyramide et qui descend progressivement, en connectant le nombre atteint sur chaque ligne au plus grand des deux nombres de la ligne du dessous situés à sa gauche et à sa droite. Dans l'exemple en amont de la question **4** ce chemin serait $2 \rightarrow 5 \rightarrow 6$. Montrer que, dans le cas général, ce chemin ne peut emprunter que le bord droit de la pyramide et aboutir à $n(n+1)/2$.

c. Conclure en envisageant le triangle équilatéral dont la base du dessous est composée des $n-2$ nombres les plus à gauche de la dernière ligne.