ACADÉMIE
DE REIMS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques

Mercredi 20 mars 2024

Candidats ne suivant pas la spécialité mathématiques de la voie générale

Deuxième partie – de 10h10 à 12h10
Composition par équipe

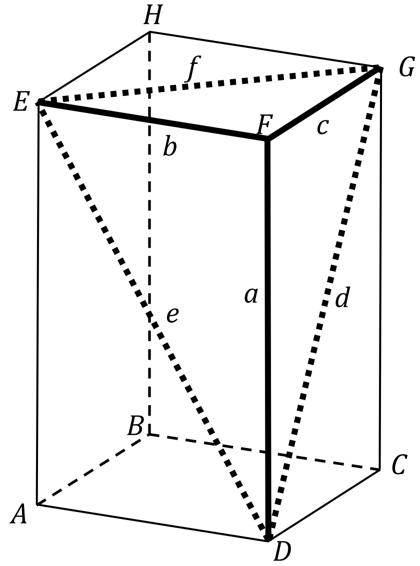
Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d’exposer le bilan des initiatives qu’ils ont pu prendre.

Exercice 1 – La brique d'Euler

Partie 1 : Brique d'Euler

On considère le pavé droit ci-contre où les nombres a, b, c, d, e et f sont définis ainsi : $a = FD$, $b = EF$, $c = FG$, $d = GD$, $e = ED$ et $f = EG$.



Dans tout ce sujet, un triplet (a, b, c) définit une brique d'Euler si les longueurs a, b et c des arêtes du pavé droit ainsi que les longueurs d, e et f des diagonales des faces sont des nombres entiers.

1. Expliquer pourquoi le pavé droit de dimensions $a = 1$, $b = 2$ et $c = 3$ n'est pas une brique d'Euler.

2. Vérifier que le pavé droit de dimensions $a = 44$, $b = 117$ et $c = 240$ est une brique d'Euler.

3. Considérons une brique d'Euler.
   a. Justifier que $e^2 = a^2 + b^2$.
   b. Exprimer de même f^2 et d^2 en fonction de a, b et c.

4. Soit k un entier strictement positif.
   a. Montrer que si (a, b, c) est un triplet définissant une brique d'Euler, alors (ka, kb, kc) est encore un triplet définissant une autre brique d'Euler.
   b. En déduire un second triplet définissant une brique d'Euler.

5. **a.** Montrer que si (a, b, c) est un triplet définissant une brique d'Euler, alors (bc, ca, ab) est encore un triplet définissant une brique d'Euler.
   b. En déduire un troisième triplet définissant une brique d'Euler.

Partie 2 : Lien avec des triplets pythagoriciens

On appelle triplet pythagoricien un triplet (x, y, z) d'entiers naturels vérifiant la relation $x^2 + y^2 = z^2$.

1. Vérifier que le triplet (3, 4, 5) est un triplet pythagoricien.

Si (x, y, z) est un triplet pythagoricien, on pose :

- $a = y(4x^2 - z^2)$
- $b = x(4y^2 - z^2)$
- $c = 4xyz$

2. Quelles valeurs retrouve-t-on pour a, b et c pour le triplet pythagoricien (3, 4, 5) ?

3. On considère un triplet pythagoricien (x, y, z).
   a. Démontrer que $b^2 + c^2 = \left(x(4y^2 + z^2)\right)^2$.
   b. Démontrer que $a^2 + c^2 = \left(y(4x^2 + z^2)\right)^2$.
   c. Démontrer que $a^2 + b^2 = (z^3)^2$.
   d. En déduire que le triplet (a, b, c) définit une brique d'Euler.

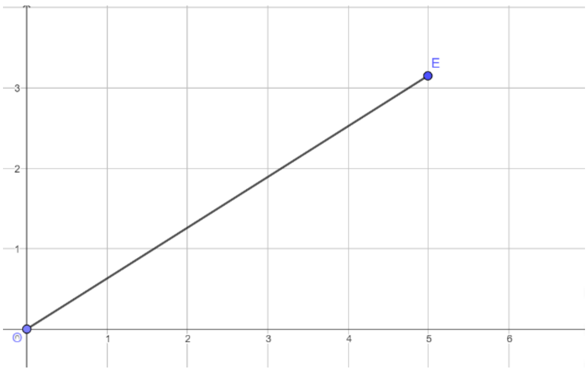
4. On considère un triplet pythagoricien (x, y, z) définissant une brique d'Euler dont les longueurs a, b et c des arêtes sont données par les formules $a = y(4x^2 - z^2)$, $b = x(4y^2 - z^2)$ et $c = 4xyz$.
   Le volume de la brique d'Euler est donné par abc.
   a. Démontrer que si x et y sont impairs alors z est pair.
   b. En déduire que si x et y sont impairs alors le volume est divisible par 2^7.
   c. Démontrer que si x et y sont pairs alors le volume est divisible par 2^9.
   d. Démontrer que, dans tous les cas, le volume est divisible par 2^4.

Exercice 2 – Algorithme de Bresenham

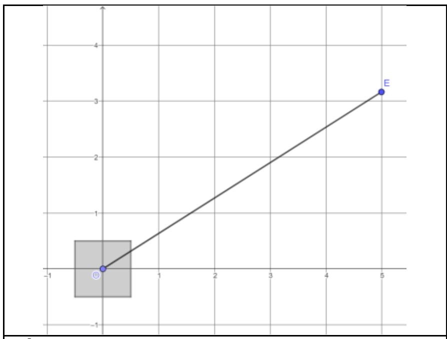
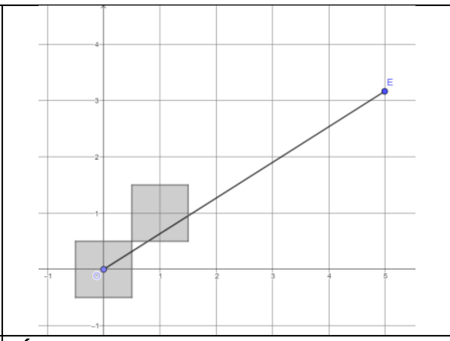
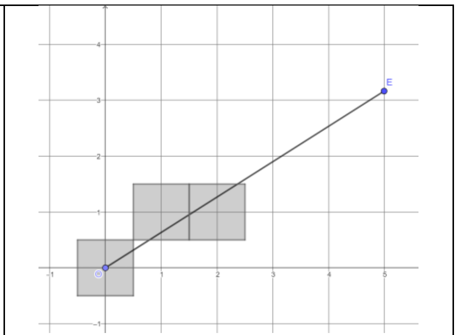
On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$. Un pixel est l'élément graphique d'un écran d'ordinateur. On suppose qu'un pixel est un carré repéré en son centre par un couple d'entiers naturels, de côté 1 à bords parallèles aux axes du repère.

L'algorithme de Bresenham permet de colorier les pixels qui représentent au mieux un segment donné (une des extrémités étant l'origine du repère) en respectant les règles suivantes :

- on colorie le pixel centré en (0,0) ;
- on colorie exactement un pixel par abscisse entière ;
- partant d'un pixel colorié, l'ordonnée du pixel à colorier suivant est soit la même soit la même augmentée de une unité ;
- pour chaque abscisse entière, on colorie le pixel contenant la plus grande partie du segment.



Ci-dessous sont représentées les premières étapes pour colorier les pixels représentant le segment $[OE]$.

		
Étape 1 : on colorie le pixel d'abscisse 0 et d'ordonnée 0. C'est un carré de côté 1 à bords parallèles aux axes du repère.	Étape 2 : on colorie le pixel d'abscisse 1. On choisit comme ordonnée 1 car le pixel ainsi créé contient une plus grande partie du segment.	Étape 3 : on colorie le pixel d'abscisse 2 On choisit comme ordonnée 1 car le pixel ainsi créé contient une plus grande partie du segment.

Partie 1 : Des pixels aux plus proches du segment

1. Sur le graphique donné en annexe, **à rendre avec la copie**, colorier les pixels les plus proches du segment $[OE_1]$ en respectant les règles de l'algorithme de Bresenham.
2. Que remarque-t-on pour le coloriage du pixel du segment $[E_1E_2]$?

Partie 2 : Comment choisir les pixels ?

Pour un segment donné, la construction nous a permis de considérer que le point $A(10\ ;\ 20)$ désigne le centre du pixel recouvrant au mieux ce segment.
Le pixel suivant sera alors centré en $B(11\ ;\ 20)$ ou en $C(11\ ;\ 21)$.

Si le milieu I du segment $[BC]$ est en dessous du segment, quel point choisit-on pour le pixel suivant : le point B ou le point C ? Justifier la réponse.

Dans la suite de l'exercice, on souhaite pixeliser le segment $[OF]$ avec $O(0\ ;\ 0)$ et $F(43\ ;\ 18)$.

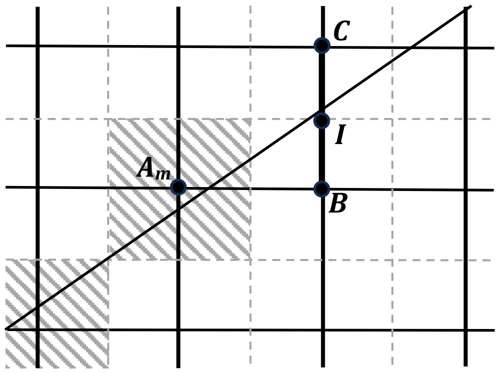
Partie 3 : Généralisation

1. Montrer que l'équation réduite de la droite (OF) est $y = \frac{18}{43}\,x$.

2. Montrer qu'un point $M(x\,;\,y)$ est situé strictement au-dessus de la droite (OF) si, et seulement si $y > \frac{18}{43}\,x$.
3. Montrer que :

$$y > \frac{18}{43}\,x \Leftrightarrow -36x + 86y > 0$$

Pour tout entier m compris entre 0 et 43, on désigne par A_m le centre du pixel recouvrant au mieux le segment $[OF]$. Tous les pixels de centre A_m seront alors coloriés pour représenter le segment $[OF]$.



Soit n l'ordonnée (entière) du centre A_m du pixel colorié.
On a donc $A_m(m\,;\,n)$.
Si $m < 43$, le pixel A_{m+1} est alors soit en $B(m+1\,;\,n)$ soit en $C(m+1\,;\,n+1)$.

Les questions suivantes permettent de choisir entre B et C.

4. Calculer les coordonnées $(x_I; y_I)$ du milieu I du segment $[BC]$.
5. Posons $f(x\,,y) = -36x + 86y$.
   Montrer alors que $f(x_I\,,\,y_I) = -36m + 86n + 7$.
6. Si $f(x_I\,,y_I) > 0$, quel point choisit-on pour A_{m+1} : le point B ou le point C ? Justifier la réponse.

Partie 4 : Un algorithme de coloriage

Le programme ci-contre, en langage naturel, permet de tracer pixel par pixel une représentation du segment $[OF]$ avec $F(43\,;\,18)$.
La fonction « ColorierPixel » a pour arguments deux entiers x et y et colorie le pixel centré en $(x\,;\,y)$.

Dans cet algorithme, m donne l'abscisse du point A_m de la partie 3 et n son ordonnée.

```
n = 0
Pour m allant de 0 à 43 Faire :
        ColorierPixel(m,n)
        Si ……………………..≤ 0
Alors :

        n =……………………..
        Fin Si
```

1. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessus implémentant la méthode de la partie 3.
2. **a.** Combien d'additions et de multiplications sont nécessaires pour effectuer le calcul
   $-36m + 86n + 7$?
   b. Déterminer le nombre d'opérations effectuées dans l'algorithme précédent ?

ANNEXE, à rendre avec la copie

Partie 1 – Question 1