ACADÉMIE
DE REIMS
Liberté
Égalité
Fraternité

Olympiades nationales de mathématiques

Mercredi 19 mars 2025

Candidats suivant la spécialité mathématiques de la voie générale

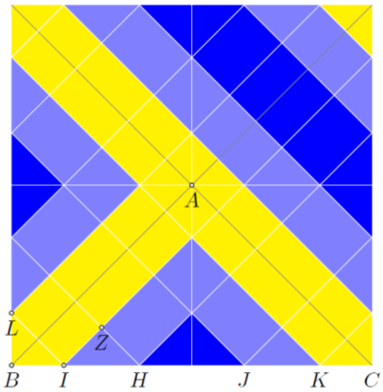
Deuxième partie – de 10h10 à 12h10
Composition par équipe

Les calculatrices sont autorisées selon la législation en vigueur.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercice 1 – Les Azulejos d'Eduardo Nery

Un **azulejo** est un motif utilisé pour créer des fresques, entre autres, au Portugal.
On veut reproduire le motif ci-dessous, créé par l'artiste portugais Eduardo Nery dans un carré.
Sur ce motif, toutes les droites qui semblent parallèles (perpendiculaires) sont bien parallèles (perpendiculaires).



La partie A est indépendante des deux autres.

Partie A : Étude du motif

Puisque le motif est un carré, le triangle IBL est rectangle isocèle en B.

IZH est obtenu à partir de IBL en le faisant tourner autour de I. Plus précisément, IZH est l'image de IBL par la rotation de centre I et d'angle 135° dans le sens des aiguilles d'une montre.

On appelle x la longueur BI.

1. Prouver que $LI = \sqrt{2}\,x$.
2. En déduire que $BC = \left(4 + 2\sqrt{2}\right)x$.
3. On veut obtenir ce motif avec $BC = 20$.
   Vérifier que $BI = 10 - 5\sqrt{2}$.

Partie B : Les fresques

On peut placer **un** azulejo de 4 manières différentes en faisant tourner, une ou plusieurs fois, le motif de 90° autour de son centre dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

On numérote chaque position par les entiers 0, 1, 2, 3.

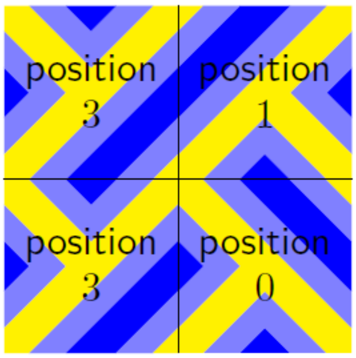
Position 0

Position 1

Position 2

Position 3

1. Notre azulejo se trouve en position 0 et on le tourne 2025 fois dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.
   Justifier qu'il se retrouve en position 1.
2. En assemblant plusieurs azulejos, on peut former une fresque. Pour indiquer la position de chaque azulejo de la fresque, on utilise un tableau de nombres appelé une matrice.



La matrice associée est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice associée est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Expliciter la matrice associée à chaque fresque ci-dessous.

fresque A

fresque B

fresque C

3. Combien de fresques différentes de deux lignes et deux colonnes peut-on faire avec 4 azulejos ?

4. Parmi les trois fresques A, B et C, quelles sont celles présentant un axe de symétrie vertical ? Observer leur matrice associée.

5. Recopier et compléter les matrices suivantes afin d'obtenir une fresque (de quatre lignes et quatre colonnes) ayant un axe de symétrie vertical et une fresque ayant un axe de symétrie horizontal.

Avec un axe de symétrie vertical	Avec un axe de symétrie horizontal
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 3 & 2 & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

6. On veut écrire un algorithme qui affiche la position du motif symétrique par rapport à un axe horizontal à partir d'une position donnée.
Recopier et compléter alors l'algorithme suivant en langage naturel.

```
a ← position de départ
si a vaut ...
      alors afficher ...
si a vaut ...
      alors afficher ...
si a vaut ...
      alors afficher ...
si a vaut ...
      alors afficher ...
```

Partie C : Des fresques mouvantes

On peut obtenir une nouvelle fresque en faisant tourner un ou plusieurs des azulejos qui la composent.
Dans l'exemple ci-dessous et les deux questions qui suivent, les rotations se font toujours dans le **sens inverse** des aiguilles d'une montre.

À partir de la fresque de gauche :

- On fait tourner de 90° l'azulejo supérieur gauche.
- On fait tourner de 180° l'azulejo inférieur droit (ce qui revient à tourner 2 fois de 90°).
- On obtient la fresque de droite.
- On associe à cette transformation la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ dite matrice de transition.

On peut indiquer ces modifications en ajoutant à la matrice de notre fresque, la matrice de transition pour obtenir la matrice de la fresque finale.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Par exemple, pour le premier motif en haut à gauche, on part de la position 3 et en effectuant la rotation de 90°, on tombe sur la position 0.

1. Indiquer la matrice de la fresque résultant du calcul ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

2. Indiquer une matrice de transition à ajouter afin d'obtenir la matrice de la fresque indiquée.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. On positionne 4 azulejos d'une fresque de deux lignes et deux colonnes sur la position 0.
On dispose d'une télécommande avec 4 boutons.
Le bouton A permet de faire tourner l'azulejo supérieur gauche de 90° dans le **sens inverse** des aiguilles d'une montre.
Le bouton B permet de faire tourner les deux azulejos du haut de 90° dans le **sens inverse** des aiguilles d'une montre.
Le bouton C permet de faire tourner l'azulejo supérieur gauche de 180° dans le **sens inverse** des aiguilles d'une montre, l'azulejo supérieur droit de 90° dans le **sens inverse** des aiguilles d'une montre et l'azulejo inférieur gauche de 90° dans le **sens inverse** des aiguilles d'une montre.
Le bouton D permet de faire tourner les quatre azulejos de 270° dans le sens des aiguilles d'une montre.
La matrice de transition associée au bouton A est $M_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

a. Expliciter M_B, la matrice de transition associée au bouton B.

b. Même question pour les boutons C et D.

c. On appuie 1 fois sur le bouton B et trois fois sur le bouton A.
Quelle est la matrice de la fresque représentée ?

d. Comment obtenir la fresque dont la matrice associée est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en appuyant sur les 4 boutons ?

e. Prouver qu'on peut obtenir toutes les fresques de deux lignes et deux colonnes en appuyant seulement sur les 4 boutons autant de fois que souhaité.

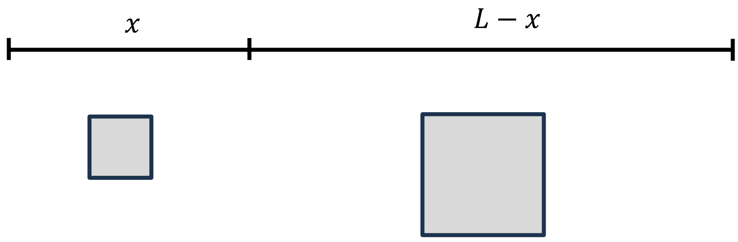
f. Indiquer comment obtenir la fresque dont la matrice associée est $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en appuyant sur les 4 boutons.

Exercice 2 – La théorie de la corde

Partie A : La corde et les pliages

Soit L un réel positif et x un réel tel que $0 \leq x \leq L$.

On coupe une corde de longueur L en deux morceaux de longueurs x et $L - x$ avec lesquels on forme deux carrés.



On s'intéresse à la somme des aires de ces deux carrés.

L'objectif est de déterminer le partage qui permettra d'obtenir la plus petite somme possible.

1. Exemple avec $L = 20$

  a. Qu'obtiendrait-on avec $x = 0$?

  b. On coupe la corde en deux morceaux de longueurs 5 et 15.
  Justifier que la somme des aires de ces deux carrés sera $\frac{125}{8}$.

  c. Est-ce la plus petite somme des aires qu'on puisse obtenir ? Justifier.

2. Étude du cas général

  a. Justifier que les côtés des deux carrés ont pour longueurs respectives $\frac{x}{4}$ et $\frac{L-x}{4}$.

  b. En déduire que la somme des aires des deux carrés obtenus est égale à :

$$\frac{1}{16}\left[2\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + \frac{L^2}{2}\right]$$

  c. En déduire la valeur de x pour que la somme des aires soit minimale et préciser la valeur de ce minimum en fonction de L.

Partie B : La corde au stade de football

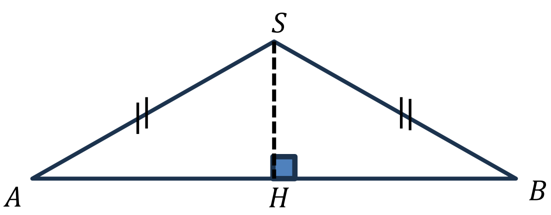
Sur un stade de football se trouvent deux piquets distants de 105 m.

On attache une corde de 106 m à ces deux piquets (on néglige la corde utile aux nœuds d'attache). La corde est donc 1 mètre plus longue que la distance nécessaire.

On se place entre les piquets matérialisés par les points A et B et on lève la corde pour la tendre. On obtient alors un triangle SAB comme dans la figure ci-contre.

En se plaçant à égale distance de A et B, on obtient alors le triangle suivant où H est le projeté orthogonal de S sur $[AB]$.

On se demande alors si la corde peut passer au-dessus de la tête du meilleur défenseur de l'équipe de France si celui-ci est monté sur les épaules du gardien de but, lui-même sur les épaules du capitaine de l'équipe. Avec seulement 1 mètre, c'est peu crédible non ? Voyons cela ...



1. Déterminer les longueurs AH et AS puis conclure.

2. Quelle doit être la longueur de la corde initiale pour pouvoir s'élever à 10 mètres de hauteur ?

Partie C : Les nœuds de Pythagore

On dispose d'une corde sur laquelle on a fait 13 nœuds régulièrement espacés. On nomme cette corde « corde des druides », elle était probablement utilisée au Moyen Âge par les bâtisseurs de cathédrales. On cherche à construire des triangles dont les côtés sont entiers comme l'illustrent les figures ci-dessous.

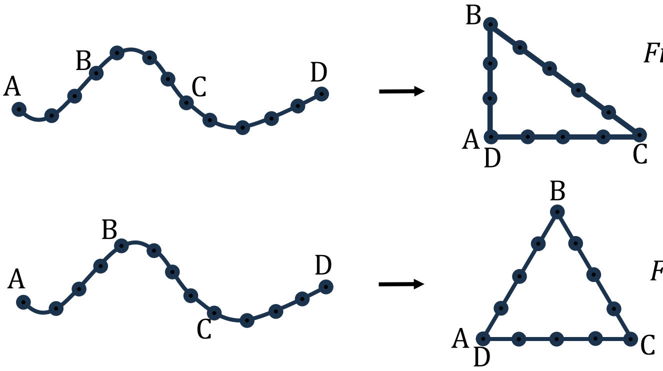


Figure 1

Figure 2

1. Vérifier qu'avec cette corde on peut obtenir un triangle rectangle et un triangle équilatéral.
2. Avec une corde à 7 nœuds, un triangle équilatéral est-il envisageable ? Un triangle rectangle ?
3. On aimerait créer une collection de cordes nous permettant d'obtenir facilement un angle droit et contenant au maximum 100 nœuds.
   On appellera triplet de Pythagore tout triplet de nombres entiers naturels $(a; b; c)$ vérifiant $c^2 = a^2 + b^2$.
   a. Montrer que si le triplet $(a\,;b\,;c)$ est un triplet de Pythagore alors le triplet
   $A(a\,;b\,;c) = (a - 2b + 2c\,; 2a - b + 2c\,; 2a - 2b + 3c)$
   est aussi un triplet de Pythagore.

On admettra que les triplets suivants sont aussi des triplets de Pythagore :

$$B(a; b; c) = (a + 2b + 2c; 2a + b + 2c; 2a + 2b + 3c)$$
$$C(a\,;b\,;c) = (-a + 2b + 2c\,; -2a + b + 2c\,; -2a + 2b + 3c)$$

   b. Déduire de ces formules une collection de cinq cordes possibles et préciser dans chaque cas si la réalisation d'un triangle équilatéral est également possible.

Partie D : Un peu de couleur

On admet que :

si $(a\,;b\,;c)$ est un triplet de Pythagore avec $a < b < c$ alors le triplet $A(a\,;b\,;c) = (a'\,;b'\,;c')$ est tel que $a < a'\,; b < b'\,; c < c'$

Il en est de même pour les triplets $B(a; b; c)$ et $C(a; b; c)$.

On admet également que les formules de la partie C engendrent tous les triplets de Pythagore dits primitifs, c'est-à-dire ceux pour lesquels les trois nombres du triplet n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

On réalise ici une corde sur laquelle on place des perles rouges ou bleues numérotées de 1 à 20. On aimerait éviter que trois nombres d'un même triplet de Pythagore soient coloriés de la même couleur. Proposer un tel coloriage. Attention, il existe des triplets non primitifs.