

Olympiades nationales de mathématiques 2026

Académie de Reims

Exercices académiques (deuxième partie)

Les calculatrices sont autorisées selon la réglementation en vigueur.
Cet énoncé comporte 7 pages

L'épreuve se déroule par groupes de 1 à 4 élèves, chaque groupe rédige une seule copie, sans limitation du nombre de pages.

Il est conseillé aux groupes de candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition, ils pourront être restitués aux candidats le lendemain.

Chaque groupe de candidats traite **deux exercices**.

- Les candidats de la voie générale suivant l'enseignement de spécialité de mathématiques doivent traiter les exercices 1 et 2.
- Tous les autres candidats doivent traiter les exercices 1 et 3.

Exercice 1 (à traiter par tous les candidats et candidates)

Palindromes et nombres de Lychrel

Un nombre entier positif se lisant de la même façon de gauche à droite ou de droite à gauche est appelé *palindrome*.

Par exemple, les nombres 2 ; 33 ; 747 ; 909 ; 64 446 sont cinq palindromes tandis que les trois nombres 45 ; 220 ; 1 234 n'en sont pas.

On appelle *retourné* d'un nombre entier positif, le nombre entier obtenu en le lisant de droite à gauche.

Par exemple, le retourné de 51 698 est 89 615 et celui de 320 est 23.

On remarque donc qu'un nombre entier positif est un *palindrome* si et seulement s'il est égal à son *retourné*.

Pour un nombre entier positif n , on dira qu'il est « à deux chiffres » lorsque $10 \leq n \leq 99$, qu'il est « à trois chiffres » lorsque $100 \leq n \leq 999$ et ainsi de suite.

Partie A. Dénombrement des palindromes

1. Donner tous les palindromes à deux chiffres.
2. Sans les lister mais en justifiant votre réponse, indiquer combien il y a ...
 - a. ... de palindromes à trois chiffres ?
 - b. ... de palindromes à dix chiffres ?
 - c. ... de palindromes à onze chiffres ?

Partie B. Obtention d'un palindrome à partir d'un nombre donné

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1
Choisir un nombre entier positif qui n'est pas un palindrome Lui ajouter son retourné Tant que le nombre obtenu n'est pas un palindrome, répéter l'action précédente sur le nombre obtenu Sinon, le programme s'arrête

Exemple : en choisissant 219, on obtient $219 + 912 = 1\,131$ qui n'est pas un palindrome.

On recommence donc avec 1 131, on obtient alors $1\,131 + 1\,311 = 2\,442$ qui est un palindrome.

Le programme s'arrête donc.

1. Appliquer ce programme aux nombres suivants :
 - a. 913
 - b. 6 789

On suppose que nous disposons d'une fonction Python `retourne`, d'argument n (un entier positif) qui renvoie le retourné du nombre n .

Par exemple, l'appel `retourne(51698)` renvoie 89615.

Cette fonction peut donc être utilisée dans les questions suivantes.

2. Recopier et compléter la ligne 2 du code ci-contre de la fonction Python `test`, d'argument n , un entier positif, de façon à ce qu'elle renvoie `True` si le nombre n est un palindrome et `False` sinon.

Lignes	Code de la fonction test
1	<code>def test(n):</code>
2	<code> if</code>
3	<code> return True</code>
4	<code> else:</code>
5	<code> return False</code>

Un nombre de Lychrel est un nombre entier positif pour lequel l'algorithme 1 ne conduira jamais à un palindrome.

3. Que se passe-t-il si on applique l'algorithme 1 à un tel nombre ?
4. On suppose dans cette question que n est un entier positif qui n'est pas un nombre de Lychrel.

Recopier et compléter la ligne 3 du code ci-contre de la fonction Python `palindrome`, d'argument n , un entier positif, de façon à ce qu'elle renvoie un palindrome en utilisant le principe de l'algorithme 1.

Lignes	Code de la fonction <code>palindrome</code>
1	<code>def palindrome(n):</code>
2	<code> while test(n) == False:</code>
3	<code> n =</code>
4	<code> return n</code>

Partie C. Cas particuliers des entiers à deux chiffres, trois chiffres et quatre chiffres

Soit n un entier positif. On pose $S(n)$ la somme de n et de son retourné.

Pour les nombres entiers entre 0 et 9, on fera (exceptionnellement !) dans cette partie la confusion entre chiffre et nombre.

1. Calculer $S(605)$.
2. On considère n un nombre entier positif à deux chiffres.
Il peut donc s'écrire sous la forme d'une somme $10 \times d + u$ avec d , non nul, le chiffre des dizaines et u celui des unités.
 - a. Écrire sous la forme d'une somme le retourné de $10 \times d + u$.
 - b. Montrer que, si $d + u \leq 9$, alors $S(n)$ est un palindrome.
3. On considère n un nombre entier positif à trois chiffres.
Il peut s'écrire sous la forme $100c + 10d + u$ avec c , non nul, le chiffre des centaines, d le chiffre des dizaines et u celui des unités.
 - a. Montrer que, si $c + u \leq 9$ et $d \leq 4$, alors $S(n)$ est un palindrome.
 - b. La réciproque de la propriété de la question 3.a. est-elle vraie ?
 - c. Montrer que, si $d \geq 5$, alors $S(n)$ n'est pas un palindrome.
4. Proposer, en justifiant, une (ou des) condition(s) similaires(s) à celles de la question 2.b. ou de la question 3.a. pour que la somme d'un nombre entier positif et de son retourné soit un palindrome dans chacun des cas suivants :
 - a. le nombre entier positif est à quatre chiffres ;
 - b. le nombre entier positif est à cinq chiffres.

Remarque : actuellement, il est conjecturé que le plus petit nombre de Lychrel est 196 mais aucune preuve mathématique de ce résultat n'a encore été trouvée.

Exercice 2 (à traiter par les candidats et candidates de la voie générale suivant la spécialité mathématiques)
Entiers parfaits

On considère un entier strictement positif N . Un diviseur positif de N est dit *strict* s'il est distinct de N . Un entier strictement positif N est dit *parfait* lorsque la somme de ses diviseurs positifs stricts est égale à N .

Ainsi l'entier 496 est-il un entier parfait car ses diviseurs stricts sont 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248 (il n'est pas demandé de le vérifier) et $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496$.

L'entier 18 n'est pas un nombre parfait car ses diviseurs stricts sont 1, 2, 3, 6, 9 et $1 + 2 + 3 + 6 + 9 \neq 18$.

Partie A. Quelques résultats utiles pour la suite

1. a. Montrer que les entiers 6 et 28 sont des entiers parfaits.
b. L'entier 120 est-il parfait ?
2. Montrer que la somme de tous les diviseurs positifs d'un entier parfait N est égale à $2N$.
3. Soit n un entier strictement positif. Démontrer que $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.
Pour ce faire, on pourra poser $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$ et exprimer $2S - S$ en fonction de n .

Partie B. Forme des entiers parfaits

On s'intéresse dans cette partie aux nombres entiers qui s'écrivent sous la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$ où n est un entier strictement supérieur à 1 et on veut savoir si ces nombres sont parfaits ou non.

1. Calculer $2^{n-1}(2^n - 1)$ pour $n = 2$ puis $n = 3$. Les deux nombres calculés sont-ils parfaits ?
2. Étude d'un cas particulier (démontré par Euclide au III^e siècle avant notre ère).

On souhaite dans cette question démontrer que la proposition P suivante est vraie :

P : « Si un entier N est de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$, où n est un entier strictement supérieur à 1, et $2^n - 1$ est un nombre premier, alors N est un entier parfait et pair. »

On considère n un entier strictement supérieur à 1. On suppose dans cette question que $2^n - 1$ est un nombre premier.

- a. Combien de diviseurs positifs 2^{n-1} possède-t-il ? Donner leur forme.
- b. En déduire le nombre de diviseurs positifs de $2^{n-1}(2^n - 1)$ et donner leur forme.
- c. En utilisant un résultat de la partie A, calculer la somme des diviseurs stricts de $2^{n-1}(2^n - 1)$ puis conclure.
3. On souhaiterait savoir s'il est possible d'alléger les hypothèses de la propriété précédente. On considère ainsi la proposition Q suivante :

Q : « Si un entier N est de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$, où n est un entier strictement supérieur à 1, alors N est un entier parfait et pair. »

- a. Calculer $2^{n-1}(2^n - 1)$ pour $n = 4$.
- b. Que peut-on en conclure concernant la proposition Q ?

Partie C. Étude de la réciproque de la propriété P (de la question 2 de la partie B).

On rappelle que N est un entier strictement positif.

On suppose dans cette partie que N est un entier parfait et pair.

Comme N est pair, on peut écrire N sous la forme $2^k \times a$ avec un a un entier impair et k un entier supérieur ou égal à 1.

L'objectif est de démontrer que N peut s'écrire sous la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$ où n est un entier strictement supérieur à 1 et $2^n - 1$ est un nombre premier (résultat démontré par Euler au XVIII^e siècle).

Pour un entier strictement positif b , on note $s(b)$ la somme de tous les diviseurs positifs de b .

On admet la propriété suivante : si deux entiers strictement positifs m et n ont pour seul diviseur commun positif le nombre 1, alors $s(m \times n) = s(m) \times s(n)$.

1. À l'aide de résultats de la partie A, et en considérant $s(N)$, montrer que :

$$s(a)(2^{k+1} - 1) = 2^{k+1} \times a$$

2. En déduire que $(2^{k+1} - 1)(s(a) - a) = a$.
3. Justifier que $s(a) - a < a$.
4. Montrer que $s(a) - a = 1$ et que a est un nombre premier.
5. Conclure.

Remarque : à l'heure actuelle, on connaît uniquement une cinquantaine de nombres parfaits (qui sont tous pairs) et on ne sait pas s'il existe des nombres parfaits qui soient impairs.

Exercice 3 (à traiter par les candidats et candidates de la voie générale NE suivant PAS la spécialité de mathématiques et tous les candidats et candidates de la voie technologique)

Pyramide et somme de carrés

On considère une pyramide, dont on a représenté les quatre premières lignes sur la figure 1.

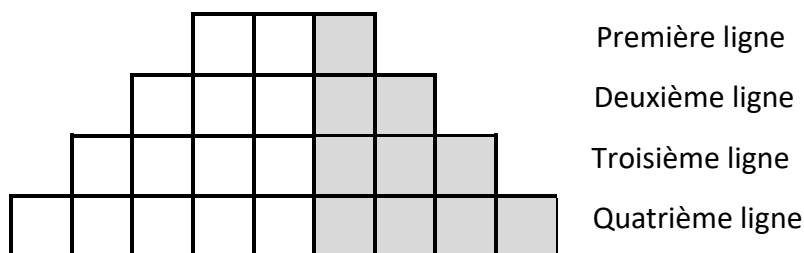


Figure 1. Les quatre premières lignes de la pyramide.

On se propose de remplir une telle pyramide avec des entiers naturels en respectant les deux règles suivantes :

- **règle 1** : chaque ligne contient des entiers naturels consécutifs rangés dans l'ordre croissant ;
- **règle 2** : sur chaque ligne, la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases blanches est égale à la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases grises.

On dira qu'une ligne est *remplie* si elle est remplie suivant les règles 1 et 2.

On obtient, par exemple, que la troisième ligne peut être remplie comme suit :

21	22	23	24	25	26	27
----	----	----	----	----	----	----

car $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 2\,030$ et $25^2 + 26^2 + 27^2 = 2\,030$

1. Les nombres 0, 1 et 2 conviennent-ils pour remplir la première ligne ? Justifier.
2. Déterminer trois nombres qui conviennent pour remplir la première ligne.
3. On se propose de chercher s'il existe une autre possibilité pour remplir cette première ligne.
 - a. On considère que la première ligne est remplie.
Montrer que si x est le nombre de la case centrale de cette première ligne, alors x est solution de l'équation $x^2 - 4x = 0$.
 - b. Résoudre cette équation et en déduire qu'il n'existe qu'une seule façon de remplir la première ligne.
4. Déterminer cinq nombres permettant de remplir la deuxième ligne.
5. Dans cette question, on considère que la quatrième ligne de la pyramide est remplie et on pose x le nombre inscrit dans la case centrale de cette ligne comme ci-dessous :

				x				
--	--	--	--	-----	--	--	--	--

- a. Recopier et remplir la quatrième ligne de cette pyramide en exprimant les nombres de chaque case en fonction de x .
- b. En déduire une équation vérifiée par x (il n'est pas demandé de la résoudre).

6. Soit n un entier strictement positif. Dans cette question, on suppose que la n -ième ligne de la pyramide est remplie et on note x_0 le nombre inscrit dans la case centrale de cette ligne.

a. Montrer que x_0 est solution de l'équation :

$$x [x - 4(1 + 2 + 3 + \dots + n)] = 0$$

b. Résoudre cette équation et en déduire la valeur de x_0 .

On donne la relation : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

c. Montrer que les valeurs des cases extrêmes de la n -ième ligne remplie sont

$$n(2n + 1) \text{ et } n(2n + 3).$$

d. Application : donner les valeurs des cases de la quatrième ligne remplie.

e. Expliquer pourquoi les valeurs des cases de la $(n + 1)$ -ième ligne sont toutes distinctes de celles de la n -ième ligne.

7. Soit n un entier strictement positif. Justifier qu'il existe des nombres permettant de remplir la n -ième ligne.
8. En 2014, Maryam Mirzakhani (mathématicienne iranienne née le 12/05/1977 et décédée le 14/07/2017, connue pour ses travaux de topologie et de géométrie) devenait la première femme mathématicienne à recevoir la médaille Fields.
- Préciser sur quelle ligne et en quelle position sur la ligne figure le nombre 2014 dans la pyramide.